Brevet de technicien supérieur Nouvelle-Calédonie Comptabilité et gestion session 2001

Exercice 1 **11 points**

On considère un produit dont le prix unitaire, exprimé en euros, est noté x.
La demande $f(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en centaines d'unités, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix unitaire de x euros.
L'offre $g(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en centaines d'unités, que les producteurs sont prêts à vendre au prix unitaire de x euros.
On appelle prix d'équilibre de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. L'objectif de cet exercice est de déterminer un prix d'équilibre.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie I : Étude statistique

Pour cette partie, on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé.

Une étude statistique a permis de relever les résultats suivants, où x_i représente le prix de vente unitaire en euros et y_i la quantité demandée, en centaines d'unités, de ce produit.

Prix unitaire en euros : x_i	1,1	1,25	1,4	2	2,45	3
Quantité en centaines : y_i	9,75	8,50	4,50	3,00	2,6	2,5

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 5 cm pour 1 euro en abscisse et 1 cm pour 1 centaine d'unités en ordonnée.
Le nuage de points M_i de coordonnées $\left(x_i ; y_i\right)$ est représenté sur la feuille annexe.
Vu la disposition des points, on ne cherche pas à remplacer ce nuage par une droite, c'est-à-dire à réaliser un ajustement affine.
On effectue le changement de variable $Y_i = \ln y_i$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous, sous le nuage de points : les valeurs de Y_i seront arrondies à 10^{-3} près.

Prix unitaire en euros : x_i 1,1	1,25	1,4	2	2,45	3
Quantité en centaines : Y_i					

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i ; Y_i)$. On en donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut. Le résultat trouvé permet d'envisager un ajustement affine.
3. Donner, par la méthode des moindre, carrés, une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax+b$; on donnera la valeur décimale approchée de a à 10^{-2} près par défaut ; b sera arrondi à l'entier le plus proche.
4. En déduire une estimation de la quantité demandée y, en centaines d'unités, en fonction du prix unitaire x, sous la forme $y = k\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où k et λ sont des constantes ; k sera arrondi à l'entier le plus proche.
5. En déduire la quantité demandée que l'on peut estimer pour un prix unitaire de $2,90$ euros. On donnera la valeur arrondie à une unité près.

Partie II : Recherche du prix d'équilibre

Dans cette partie, on considère que la demande, exprimée en centaines d'unités, pour un prix unitaire de x euros est $f(x)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par :

$$f(x) = 20\mathrm{e}^{-0,7x}.$$

De même, l'offre, exprimée en centaines d'unités, pour un prix unitaire de x euros est $g(x)$, où g est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par :

$$g(x) = 0,15x + 2,35.$$

1. On désigne par f' 1 la fonction dérivée de f.

a. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

b. Sur le graphique donné en annexe, tracer les représentations graphiques C et Δ des fonctions f et g.

c. Déterminer graphiquement, en faisant figurer les tracés utiles, une valeur approchée, arrondie à 10^{-1} près, de l'abscisse du point d'intersection de C et Δ.

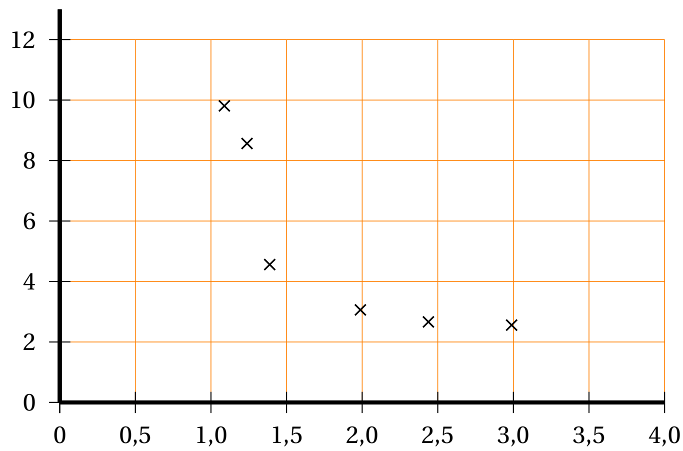
2. Soit la fonction h définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $[1\,;\,3]$.

b. En déduire, en justifiant, que l'équation $h(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[1\,;\,3]$ une solution unique, notée α, dont on donnera la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut. Vérifier que cette valeur est compatible avec la valeur lue sur le graphique au 1.

c. Donner, à 10^{-2} près, le prix d'équilibre en euros, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. Calculer l'offre correspondant au prix d'équilibre.



Exercice 2 **9 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une centrale d'achat fournit trois types de poulets à une chaîne d'hypermarchés :

— des poulets « biologiques », dits poulets P_1 ;
— des poulets de Bresse, dits poulets P_2 ;
— des poulets élevés en plein air, dits poulets P_3.

Une étude de marché a montré qu'un poulet se vend mal lorsque son poids est inférieur ou égal à 1 kilogramme.
Avant leur conditionnement et leur mise en vente en grande surface, les poulets sont stockés dans un entrepôt frigorifique.
Dans la suite, on s'intéresse aux stocks de ces trois types de poulets, une journée donnée.

Partie 1 : Etude des poulets P_1

On note X la variable aléatoire qui, à chaque poulet prélevé au hasard dans le stock de poulets P_1 associe son poids en kg. On admet que X suit la loi normale de moyenne $1,46$ et d'écart-type $0,30$.
Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité de l'évènement A : « un poulet prélevé au hasard dans le stock de poulets P_1 a un poids inférieur ou égal à 1 kg ».

Partie II : Étude des poulets P_2

On note B l'évènement : « un poulet prélevé au hasard dans le stock de poulets P_2 a un poids inférieur ou égal à 1 kg ».
On suppose que la probabilité de l'évènement B est $0,03$.
On prélève au hasard 100 poulets dans le stock de poulets P_2. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 poulets.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 poulets ainsi défini, associe le nombre de poulets ayant un poids inférieur ou égal à 1 kg.

1. Expliquer pourquoi Y suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.
2. On approche la loi de la variable aléatoire Y par la loi de Poisson de même espérance mathématique.
   Donner le paramètre de cette loi.
3. Utiliser cette approximation pour calculer, à 10^{-2} près, la probabilité de l'évènement C : « parmi 100 poulets prélevés au hasard dans le stock de poulets P_2 il y a au plus 4 poulets ayant un poids inférieur ou égal à 1 kg ».

Partie III : Étude des poulets P_3

Dans cette partie, on cherche à estimer le pourcentage p inconnu de poulets du stock dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.
On considère un échantillon de 100 poulets prélevés au hasard et avec remise dans le stock de poulets P_3 on constate qu'il contient 4 poulets dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.

1. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de poulets du stock de poulets P_3 dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 poulets prélevés au hasard et avec remise dans le stock de poulets P_3 associe le pourcentage de poulets de cet échantillon dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.
   On suppose que F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p\,;\,\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$ où p est le pourcentage inconnu de poulets du stock de poulets P_3 dont le poids est inférieur ou égal à 1 kg.
   a. Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95 %, les bornes seront données à 10^{-3} près.
   b. On considère l'affirmation suivante : « le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question a. ». Cette affirmation est-elle vraie ?