Brevet de technicien supérieur session 2016
Comptabilité et gestion des organisations
Nouvelle–Calédonie

Durée : 2 heures

Exercice 1 — 10 points

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A - Évènements indépendants

Un centre commercial est équipé de deux escalators E_1 et E_2 destinés aux visiteurs.
Ces deux escalators fonctionnent de façon indépendante.
On s'intéresse au fonctionnement des deux escalators durant une même année.
On note :
F_1 l'évènement « l'escalator E_1 fonctionne sans panne durant cette année ».
F_2 l'évènement « l'escalator E_2 fonctionne sans panne durant cette année ».
On considère que les évènements F_1 et F_2 sont indépendants et on rappelle que dans ce cas, les évènements F_1 et $\overline{F_2}$ sont indépendants, ainsi que les évènements $\overline{F_1}$ et F_2. On donne :

$$P(F_1) = 0,95 \quad \text{et} \quad P(F_2) = 0,98.$$

On définit les trois évènements suivants :

- F : « Les deux escalators fonctionnent sans panne pendant une année »
- G : « Au moins un des deux escalators fonctionne sans panne pendant une année »
- H : « Un seul des deux escalators fonctionne sans panne pendant une année ».

1. Montrer que la probabilité de l'évènement F est $0,931$.

2. Calculer la probabilité de l'évènement G.

3. **a.** Traduire par une phrase l'évènement $F_1 \cap \overline{F_2}$ et calculer sa probabilité.

b. Justifier que l'évènement H est égal à l' évènement $\left(F_1 \cap \overline{F_2}\right) \cup \left(\overline{F_1} \cap F_2\right)$.

c. Calculer la probabilité de l'évènement H.

On pourra admettre que la probabilité de l'événement $\left(F_1 \cap \overline{F_2}\right) \cap \left(\overline{F_1} \cap F_2\right)$ vaut 0.

Dans la suite de l'exercice on étudie la fréquentation d'une boutique de produits bio implantée dans le centre commercial. Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-4}.

Partie B - Loi binomiale

Une étude statistique a permis d'établir qu'un passant pris au hasard au cours d'une journée dans la galerie marchande du centre commercial entre dans la boutique de produits bio avec une probabilité de $0,1$.
On choisit au cours d'une journée. de façon aléatoire. un échantillon de 60 passants dans la galerie marchande ; le nombre de clients du centre commercial est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes qui entrent dans la boutique de produits bio, parmi les 60 passants de l'échantillon.

1. **a.** Justifier le fait que la variable X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   Par une phrase simple, interpréter ce résultat,

2. Calculer les probabilités des évènements suivants :

   a. « Exactement 2 passants de l'échantillon entrent dans la boutique de produits bio »

   b. « Au moins 10 passants de l'échantillon entrent dans la boutique de produits bio »

Partie C - Approximation de la loi binomiale par une loi normale

La probabilité qu'un passant pris au hasard au cours d'une journée dans la galerie marchande du centre commercial entre dans la boutique de produits bio est toujours de $0,1$.
On choisit désormais, de façon aléatoire, un échantillon de 300 passants de la galerie marchande : cet échantillon est également assimilé à un tirage avec remise.
On désigne par Y la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes qui entrent dans la boutique de produits bio, parmi les 300 passants de l'échantillon.
On admet que l'on peut approcher la loi binomiale suivie par Y par la loi normale d'espérance 30 et d'écart-type $5,2$. Soit Z la variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier les valeurs les paramètres de la loi normale suivie par Z.
2. Compte tenu de la correction de continuité nécessaire pour approcher la loi binomiale par une loi normale, déterminer une approximation des probabilités suivantes :

   a. $P(Y > 34)$ en calculant $P(Z > 34,5)$.

   b. $P(26 \leqslant Y \leqslant 34)$ en calculant $P(25,5 \leqslant Z \leqslant 34,5)$.

3. On admet que $P(Z > 38,5) \approx 0,05$.
   Déterminer la valeur du nombre réel k tel que : $P(k < Z < 38,5) \approx 0,90$.
   Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 2 — 10 points

Un formulaire est disponible en fin d 'exercice

Le but de cet exercice est l'étude de la demande et de l'offre pour un nouveau produit de grande consommation vendu entre $0,50$ et 4 €.

Une étude statistique a donné les résultats suivants dans lesquels :
x désigne le prix unitaire du produit, exprimé en euros.
y désigne la demande (quantité de produit demandée par les consommateurs).
z désigne l'offre (quantité de produit offerte sur le marché par les producteurs).
y et z sont exprimées en milliers d'unités.

x en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y en milliers d'unités	6,4	5,1	4,1	3,2	2,6	2,1	1,7	1,5
z en milliers d'unités	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6

Partie A - Étude de l'offre

1. On effectue le changement de variable suivant : $t = \mathrm{e}^{z}$.

   a. Compléter le tableau donné en annexe à rendre avec la copie. Arrondir les résultats à 10^{-2}.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de t en x par la méthode des moindres carrés sous la forme $t = ax+b$, où les coefficients a et b seront arrondis au centième.

c. En déduire une expression de z en fonction de x.

2. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$, par :

$$g(x) = \ln(3x + 0,9).$$

On admet que pour un prix unitaire de x euros, x compris entre $0,5$ et 4, $g(x)$ correspond à l'offre en milliers d'unités.

a. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4$J et on note g' sa fonction dérivée.
Déterminer $g'(x)$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0,5\,;\,4]$

La courbe $\mathscr{C}_\}$ représentative de la fonction g est tracée dans le repère donné en **annexe à rendre avec la copie**.

Partie B - Étude de la demande et détermination du prix d'équilibre

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$, par :

$$f(x) = 15\mathrm{e}^{-0,3x} + x - 7.$$

On admet que pour un prix unitaire de x euros, compris entre $0,5$ et 4, $f(x)$ modélise la demande, en milliers d'unités.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur intervalle $[0{,}5\,;\,4]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Déterminer $f'(x)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1 - 4,5\mathrm{e}^{-0,3x} \geqslant 0$.

c. En déduire que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$.

2. On admet que les deux premières lignes du tableau statistique donné au début de l'exercice 2 est un tableau de valeurs de la fonction f. Autrement dit, dans ce tableau, $y = f(x)$.
Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0{,}5\,;\,4]$ dans le repère précédent donné en **annexe à rendre avec la copie**.

3. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du prix d'équilibre de ce nouveau produit, c'est-à-dire le prix de vente pour lequel la demande est égale à l'offre.

Formulaire

Si u est une fonction strictement positive, définie et dérivable, sur un intervalle I alors la fonction $(\ln u)$est définie et dérivable sur I, et sa dérivée est donnée par :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est définie et dérivable sur I, et sa dérivée est donnée par :

$$(\mathrm{e}^u) = u'\mathrm{e}^u$$

ANNEXE à rendre avec la copie

EXERCICE 2

Partie A - question 1. a.

x en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
z en milliers	0,9	1,4	1,7	1,9	2,1	2,3	2,4	2,6
$t = \mathrm{e}^z$	2,46							

Parties A et B