∽ BTS Groupement C1 [1] – 16 mai 2025 ∾

Matériel autorisé :
L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

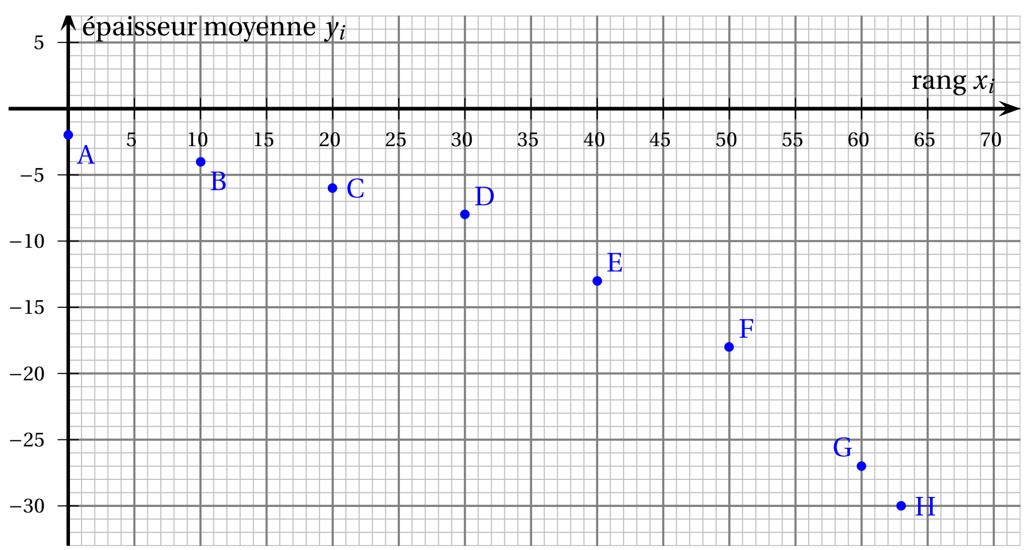
Exercice 1 — 10 points

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes.

On s'intéresse à l'évolution de l'épaisseur moyenne des glaciers au niveau mondial.
Le tableau ci-dessous donne les variations en mètre de l'épaisseur moyenne de tous les glaciers par rapport à 1956, année de référence. Le rang 0 correspond à l'année 1960.
Par exemple, on peut lire dans le tableau que les glaciers ont perdu, en moyenne, 2 mètres d'épaisseur entre 1956 et 1960 et 4 mètres d'épaisseur entre 1956 et 1970.

Année	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020	2023
Rang x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
Épaisseur y_i (en mètre)	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30

Le graphique ci-dessous représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.



1. Conception des processus de découpe et d'emboutissage Conception des processus de réalisation de produits (2 options) Conception et réalisation en chaudronnerie industrielle Conception et industrialisation en construction navale Développement et réalisation bois Fonderie Forge Innovation textile (2 options) Maintenance des matériels de construction et de manutention Maintenance des systèmes (4 options) Maintenance des véhicules Motorisations toutes énergies Pilotage des procédés Systèmes constructifs bois et habitat Techniques et services en matériels agricoles

Partie A - Première modélisation

1. Peut-on penser qu'un ajustement affine de y en x est approprié ? Justifier.
2. Pour chaque épaisseur x_i, on pose $z_i = \ln(-y_i)$.
   Recopier et compléter les quatre dernières colonnes du tableau suivant. On arrondira les résultats à 10^{-3}.

Rang x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
Épaisseur y_i (en mètre)	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30
z_i	0,693	1,386	1,792	2,079				

3. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x. On arrondira les coefficients à 10^{-3}.
4. En déduire un ajustement de y en x sous la forme $y = A\mathrm{e}^{ax}$, où A et a sont deux constantes réelles.
   On arrondira A au centième et a au millième.
5. Avec ce modèle, estimer l'épaisseur moyenne perdue par les glaciers en 2030.
   On arrondira le résultat à l'unité.

Partie B - Deuxième modélisation

On suppose dans cette partie que l'évolution de l'épaisseur moyenne (en mètre) des glaciers par rapport à 1956 peut être modélisée par une fonction g du temps x, exprimé en année ($x = 0$ représentant l'année 1960), qui vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' - 0{,}041\,y = 0$$

où y est une fonction dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. Sachant que $g(30) = -8$, déterminer l'expression de g en fonction de x. On arrondira la constante calculée à 10^{-3}.
3. Avec ce modèle, estimer au cours de quelle année l'épaisseur moyenne aura diminué de 50 m par rapport à 1956.

Partie C - Étude de fonction

On suppose dans cette partie que l'évolution de l'épaisseur moyenne (en mètre) des glaciers par rapport à 1956 en fonction du temps x en année ($x = 0$ représentant l'année 1960) peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -2{,}3\,\mathrm{e}^{0{,}04x}.$$

La fonction f admet une dérivée sur $[0\,;\,+\infty[$, notée f'.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Donner le signe de $f'(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.
   En déduire les variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

   c. Cela est-il cohérent avec le contexte de l'exercice ? Justifier.

2. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$. Que peut-on penser de la modélisation par cette fonction sur le long terme ? Justifier.

Exercice 2 — 10 points

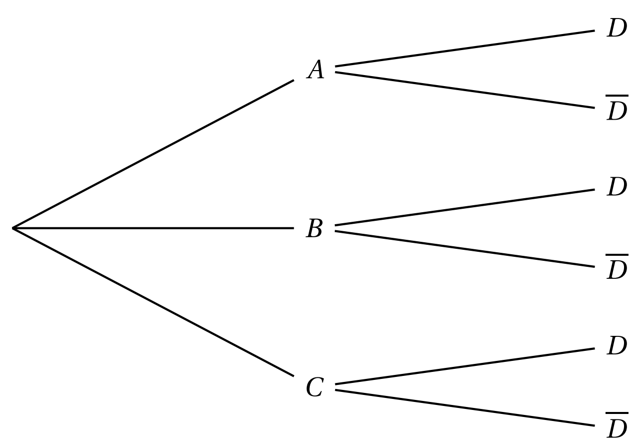
Une entreprise réalise des forets (tiges métalliques pour percer le béton). Elle possède trois machines, nommées A, B et C, réglées pour fabriquer des forets de diamètre 10 mm et de longueur 110 mm.

Partie A - Probabilités conditionnelles

La machine A fabrique 20 % de la production de l'entreprise et les machines B et C fabriquent chacune 40 % de la production de l'entreprise.
On considère que 1 % des forets fabriqués par la machine A sont défectueux, ainsi que respectivement 2 % et 1,5 % des forets fabriqués par les machines B et C.
On choisit un foret au hasard dans l'ensemble de la production.

- A est l'évènement « le foret provient de la machine A ».
- B est l'évènement « le foret provient de la machine B ».
- C est l'évènement « le foret provient de la machine C ».
- D est l'évènement « le foret est défectueux ».
- $\overline{D}$ est l'évènement « le foret n'est pas défectueux ».

1. Reproduire et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.



2. Calculer $P(A \cap D)$.

3. Montrer que $P(D) = 0{,}016$.

4. Calculer $P_D(B)$, c'est-à-dire la probabilité qu'un foret provienne de la machine B sachant qu'il est défectueux.

Partie B - Contrôle de conformité

On admet dans cette partie que la probabilité de choisir au hasard dans le stock de l'entreprise un foret défectueux est de 0,016.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 forets choisis au hasard dans le stock de l'entreprise, associe le nombre de forets défectueux dans ce prélèvement.
On admet que le stock est suffisamment grand pour assimiler chaque prélèvement à 100 tirages successifs avec remise d'un foret du stock. On choisit au hasard un prélèvement de 100 forets.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité de n'avoir aucun foret défectueux dans ce prélèvement.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux forets défectueux dans ce prélèvement.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Partie C - Contrôle du diamètre

On s'intéresse au diamètre des forets fabriqués par la machine B.
On admet que la variable aléatoire Y donnant le diamètre d'un foret (en millimètre) pris au hasard dans la production de la machine B suit une loi normale de paramètre $\mu = 10$ et $\sigma = 0{,}02$.
L'entreprise estime qu'un foret peut être commercialisé lorsque son diamètre est compris entre 9,95 mm et 10,05 mm.
Calculer la probabilité qu'un foret choisi au hasard dans la production de la machine B puisse être commercialisé. On arrondira le résultat à 10^{-3}.

Partie D - Test d'hypothèse

L'entreprise considère qu'une machine est correctement réglée lorsque le diamètre moyen des forets produits par cette machine est égal à 10 millimètres. Suite à la maintenance de la machine C, l'entreprise se demande si cette machine est toujours correctement réglée.
Le responsable qualité construit pour cela un test d'hypothèse bilatéral au seuil d'erreur de 5 %.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 forets prélevés au hasard dans la production de la machine C, associe la moyenne, en millimètre, des diamètres des forets de cet échantillon.
On suppose que le nombre de forets est suffisamment élevé pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 0{,}009$.
L'hypothèse nulle H_0 est donc « $m = 10$ ».

1. Donner l'hypothèse alternative H_1.
2. Déterminer sous l'hypothèse H_0, une valeur arrondie à 10^{-3} du réel h tel que :

$$P(10 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 10 + h) = 0{,}95$$

3. On prélève un échantillon de 50 forets et on obtient un diamètre moyen de 9,97 mm. Peut-on, au seuil de 5 %, conclure que la machine C est correctement réglée ?