# Brevet de technicien supérieur groupement B2
# 13 mai 2019 - Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie

**Exercice 1** **10 points**

Lorsqu'un fil électrique est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. On note $f(t)$ la température, exprimée en degré Celsius, du conducteur à l'instant $t$, exprimé en seconde, avec $t$ variant dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Dans cet exercice, on se propose d'étudier l'évolution de la température du conducteur en fonction du temps.

**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

### A. Résolution d'une équation différentielle

À l'instant $t = 0$ de la mise sous tension, la température du conducteur est celle du milieu ambiant, c'est-à-dire 18 degrés Celsius. Ainsi, on a $f(0) = 18$.
Dans les conditions de l'expérience, la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ :

$$y' + 0,05y = 2,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable $t$, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, et $y'$ sa fonction dérivée.

**1.** **a.** Résoudre l'équation $(E_0)$ : $y' + 0,05y = 0$.

On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| $ay' + by = 0$ | $f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ |

**b.** Vérifier que la fonction $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = 40$ est une solution de l'équation différentielle $(E)$.

**c.** En déduire les solutions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle $(E)$.

**2.** On rappelle que la température initiale du conducteur est 18° Celsius.
Ainsi, la fonction $f$ exprimant la température du conducteur est la solution de l'équation différentielle $(E)$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 18$.
Déterminer alors une expression de la fonction $f$.

### B. Étude de la fonction *f*

On admet que la fonction donnant la température du conducteur est la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = -22\mathrm{e}^{-0,05t} + 40.$$

On note $C$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La courbe $C$ est tracée en annexe.

**1.** **a.** On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,05t} = 0$.
Déterminer alors la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

**b.** En déduire que la courbe $C$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
Tracer cette asymptote sur la représentation graphique donnée en annexe.

**2.** Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir ci-dessous une expression de la dérivée $f'$ de la fonction $f$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $f(t)$ | $:= -22\mathrm{e}^{-0,05t} + 40$ |
| • | $\to f(t)$ | $:= -22\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t} + 40$ |
| 2 | Dérivée$(f(t), t)$ | |
| | $\to$ | $\dfrac{11}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t}$ |

**a.** En admettant ce résultat, étudier les variations de la fonction $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**b.** Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

**3.** Ce même logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f$ au voisinage de zéro.

| | |
|---|---|
| 3 | PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$ |
| | $\to 18 + \dfrac{11}{10}t - \dfrac{11}{400}t^2$ |

*Les deux questions suivantes sont des questions à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.*
*La réponse juste rapporte* 0,5 *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

**a.** Une équation de la tangente $T$ à la courbe $C$ au point d'abscisse 0 est :

| | | |
|---|---|---|
| $y = 18$ | $y = 18 + \dfrac{11}{10}t$ | $y = 18 + \dfrac{11}{10}t - \dfrac{11}{400}t^2$ |

**b.** La vitesse de chauffe, exprimée en degré Celsius par seconde, à l'instant initial est égale à $f'(0)$. Cette vitesse vaut :

| | | |
|---|---|---|
| 18 | $\dfrac{11}{10}$ | $\dfrac{11}{400}$ |

**C. Dépassement d'un seuil et algorithmique**

On cherche à déterminer le premier instant $t$, en seconde, à partir duquel la température du fil du conducteur dépasse 21°Celsius.
À cette fin, on considère l'algorithme suivant.

$t \leftarrow 0$
Tant que $f(t) \leqslant 21$
    $t \leftarrow t + 1$
Fin de Tant que

Remarque : dans cet algorithme $t \leftarrow 0$ signifie que $t$ prend la valeur 0.

**1.** Faire tourner cet algorithme « à la main » en complétant le tableau donné en annexe.

**2.** Quelle sera la valeur contenue dans la variable $t$ à la fin de l'algorithme ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

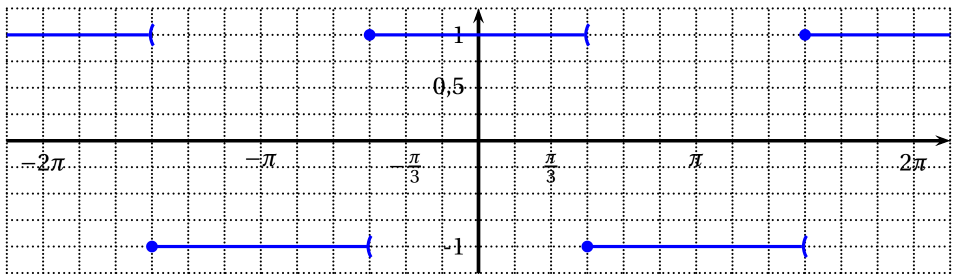
**EXERCICE 2** **10 points**

Dans les entreprises, l'énergie électrique est fournie par des onduleurs qui alimentent une multitude de récepteurs (ordinateurs, lampes basse consommation ... ) générant des courants harmoniques. Sans une installation adaptée et une utilisation de récepteurs optimisés, l'accumulation d'harmoniques de rangs multiples de 3 conduit au déséquilibre du triphasé. Cela peut engendrer de graves problèmes : surchauffe du fil portant le neutre, phénomène d'interférence, augmentation des pertes d'énergie, ouverture des fusibles ou interruptions automatiques.

**A. Représentation graphique d'un signal déphasé**

Un onduleur à commande asynchrone délivre une tension périodique $f(t)$ de période $2\pi$ selon la représentation graphique suivante.

Représentation graphique de $t \mapsto f(t)$




Une représentation graphique de la fonction $t \mapsto f(t)$ est redonnée en annexe 2.

1. À l'aide de la représentation graphique de la fonction $f$, compléter le tableau de valeurs donné en annexe 2.
2. Une représentation graphique de la fonction $t \mapsto f\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ est donnée en annexe 2.

   Construire en annexe 2 la représentation graphique de la fonction $t \mapsto f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ dans le repère prévu à cet effet.
3. En régime triphasé, l'onduleur soumet la phase 1 à la tension $f(t)$, la phase 2 à la tension $f\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et la phase 3 à la tension $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$. Le neutre est soumis à la somme $S(t)$ des tensions des trois phases définie par :

$$S(t) = f(t) + f\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) + f\left(t+\frac{4\pi}{3}\right).$$

   La système triphasé est équilibré si, pour tout nombre réel $t$, $S(t) = 0$.

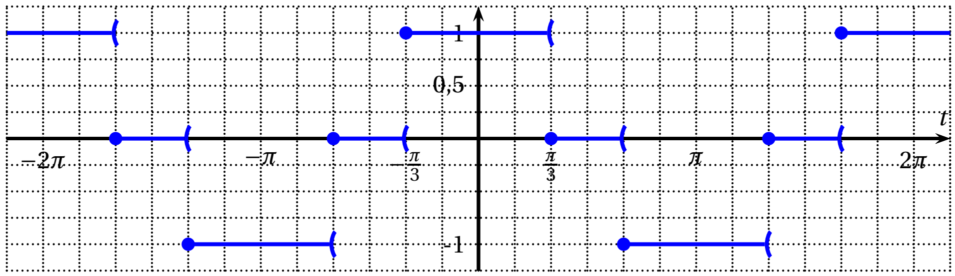
   **a.** Calculer $S(0)$.

   **b.** Le système triphasé étudié dans cette partie est-il équilibré ?

**B. Développement en série de Fourier**

Pour garantir l'équilibrage d'un système triphasé, on peut utiliser un ondule ur à commande décalée. Ainsi, nous considérons dans cette partie que la tension délivrée est un signal $g$ de période $2\pi$ dont une représentation graphique figure ci-dessous.

Représentation graphique de $t \mapsto g(t)$




Dans la suite de l'exercice, $a_0$, $a_n$ et $b_n$ désignent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $g$ avec les notations du formulaire donné en bas de page.

**1.** Donner la parité de la fonction $g$. En déduire la valeur des coefficients $b_n$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

**2.** Donner la valeur de $g(t)$ sur chacun des trois intervalles $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{3}\right[$, $\left[\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right[$ et $\left[\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\pi\right[$.

**3.** **a.** Déterminer $a_0$.

**b.** Un logiciel de calcul formel fournit, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{n}.$$

En admettant le résultat précédent, justifier que, pour tout entier naturel $k$ non nul, $a_{3k} = 0$.

**c.** On démontre que ce qui empêche un système d'être équilibré est la présence d'harmoniques non nulles de rangs multiples de 3 dans le développement en série de Fourier de la fonction $g$.

En admettant cette règle, peut-on considérer que le système est équilibré ?

**Formulaire pour les séries de Fourier**

$f$ fonction périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Développement en série de Fourier :

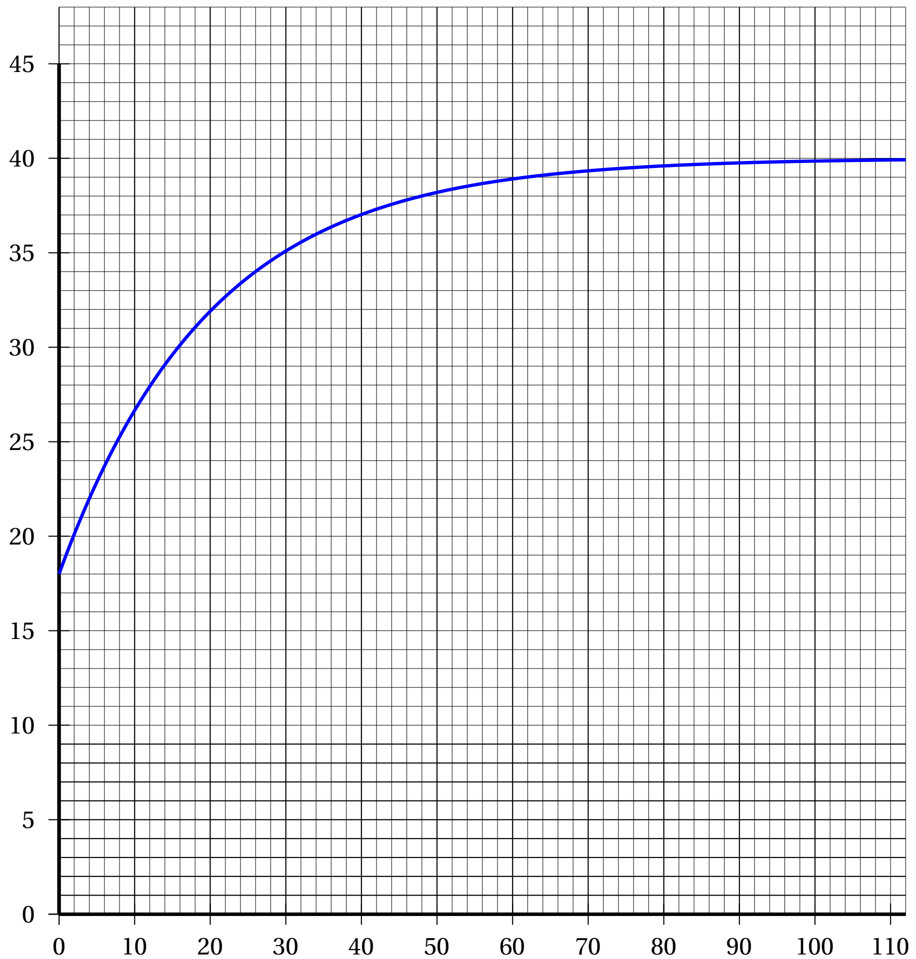
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right),$$

$a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$; $\quad a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \ (n \in \mathbb{N})$

$b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \ (n \in \mathbb{N})$

**ANNEXE 1 À RENDRE AVEC LA COPIE**

**EXERCICE 1 QUESTION B. 1. b.**

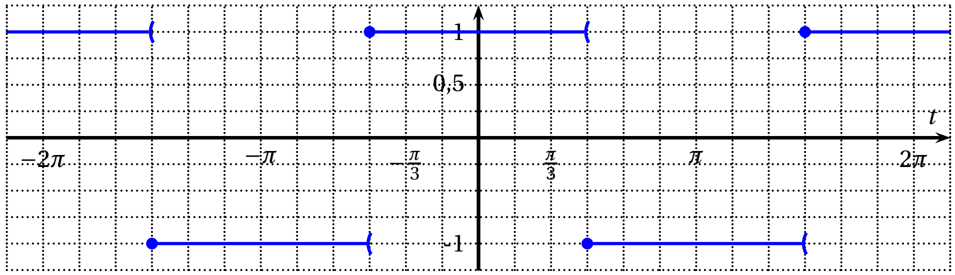



**EXERCICE 1 QUESTION C. 1.**

| Valeur de $t$ | Valeur de $f(t)$ arrondie à $10^{-2}$ | Condition $f(t) \leqslant 21$ |
|---|---|---|
| 0 | 18 | Vraie |
| 1 | | |
| | | |
| | | |

**ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE**

Représentation graphique de $t \longmapsto f(t)$ :

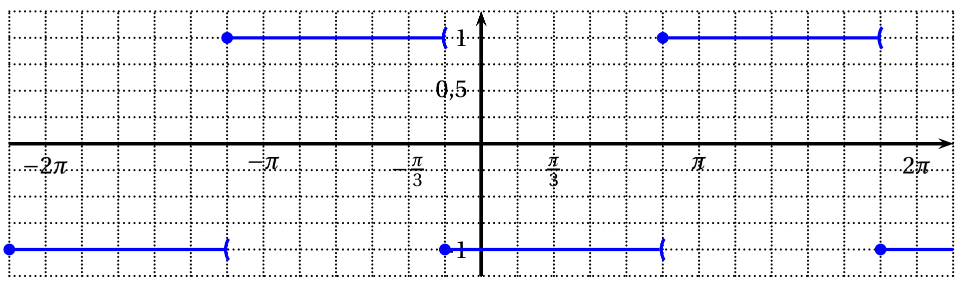



**EXERCICE 2 QUESTION A. 1.**

| $t$ | $-\dfrac{4\pi}{3}$ | $-\pi$ | 0 | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\pi$ | $\dfrac{4\pi}{3}$ | $\dfrac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t+\dfrac{4\pi}{3}$ | | | | | | | |
| $f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ | | | | | | | |

**EXERCICE 2 QUESTION A. 2.**

Représentation graphique de $t \longmapsto f\left(t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ :




Repère pour la représentation de $t \longmapsto f\left(t+\dfrac{4\pi}{3}\right)$ :