

∞ BTS Métropole 14 mai 2024 ∞

Groupement B3¹

Durée : 2 heures

**L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé**

Exercice 1

10 points

On coule du béton pour faire une dalle. Au début, le béton est mou, puis, au fil du temps, il sèche, et devient plus résistant.

On note $f(t)$ la résistance du béton à l'instant t .

$f(t)$ est exprimée en mégapascal (MPa) et t désigne le nombre de jours de séchage.

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + 0,06y = 2,1,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et où y' est la dérivée de y .

1. Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation différentielle :

$$(E_0): \quad y' + 0,06y = 0.$$

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = ke^{-at}$

2. On considère la fonction constante g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = 35$.

Vérifier que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) .

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

4. À l'instant $t = 0$, on considère que la résistance du béton est nulle.

En déduire que la fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(t) = -35e^{-0,06t} + 35.$$

1. Électrotechnique

Partie B. Étude de fonction

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = -35e^{-0,06t} + 35.$$

On rappelle que $f(t)$ désigne la résistance du béton, exprimée en mégapascal, à l'issue de t jours de séchage.

1. Quelle est la résistance du béton après 7 jours de séchage? Après 72 heures?
Arrondir au dixième.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
Vérifier que, pour tout réel t appartenant à $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(t) = 2,1e^{-0,06t}.$$

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variations de f
4. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Le fabricant du béton affirme que la résistance après 28 jours de séchage correspond à 80 % de la résistance finale.
Cette affirmation est-elle juste?
6. On considère la fonction F définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$F(t) = \left(\frac{1750}{3}\right)e^{-0,06t} + 35t.$$

Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

7. Déterminer une valeur approchée au dixième de la valeur moyenne de la résistance du béton sur les 28 premiers jours.
On fournit la formule suivante :

La valeur moyenne M d'une fonction h sur l'intervalle $[a ; b]$ est définie par :

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(t) dt.$$

Partie C. Algorithme

On note N le nombre entier correspondant au nombre minimal de jours de séchage permettant d'obtenir une résistance au moins égale à 21 MPa.

1. Recopier l'algorithme ci-dessous et compléter les lignes 3 et 4.

Ligne 1	$t \leftarrow 0$
Ligne 2	$R \leftarrow 0$
Ligne 3	Tant que ...
Ligne 4	$t \leftarrow \dots$
Ligne 5	$R \leftarrow -35e^{-0,06t} + 35$
Ligne 6	Fin Tant que

2. Donner la valeur de N . Expliquer la démarche suivie.

Exercice 2**10 points**

Un formulaire sur les séries de Fourier est placé à la fin de l'exercice.

On étudie le fonctionnement d'un filtre.

La tension en entrée du filtre est une fonction E pour laquelle on possède les informations suivantes :

- E est une fonction périodique de période $T = 20$.
- $E(t) = \begin{cases} 12 & \text{si } t \in [0 ; 10[\\ 0 & \text{si } t \in [10 ; 20[. \end{cases}$

1. On note ω la pulsation de la fonction E .

Vérifier que $\omega = \frac{\pi}{10}$.

2. Représenter la courbe de la fonction E sur votre copie en respectant les consignes suivantes :

- Échelle des abscisses : 2 cm pour représenter l'intervalle allant de $t = 0$ à $t = 10$.
- Échelle des ordonnées : 1 cm pour représenter l'intervalle allant de $E = 0$ à $E = 2$.
- La représentation est effectuée pour $t \in [-30 ; 30]$.

3. Déterminer la valeur moyenne a_0 de E .

4. On rappelle que la valeur efficace de E , notée E_{eff} est donnée par :

$$(E_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [E(t)]^2 dt.$$

Montrer que $E_{\text{eff}} = 6\sqrt{2}$.

5. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $a_n = 0$.

6. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$b_n = \frac{12}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)].$$

Montrer que, lorsque n est pair, on a $b_n = 0$.

7. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Les valeurs seront arrondies à 0,01.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n							

8. On considère la grandeur E_7 définie par :

$$(E_7)^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^7 [(a_k)^2 + (b_k)^2]$$

Commenter l'affirmation suivante :

« E_7 représente une approximation de E_{eff} avec moins de 5% d'erreur ».

FORMULAIRE sur les séries de Fourier

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Développement en série de Fourier de la fonction f

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)).$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \geq 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n \geq 1).$$

La valeur efficace du signal f est notée f_{eff} . Elle est donnée par :

$$(f_{\text{eff}})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt.$$

- Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt.$$