

**œ Brevet de technicien supérieur œ**  
**Opticien lunetier session 2006**

A. P. M. E. P.

**Exercice 1**

**10 points**

**Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.**

Une entreprise est approvisionnée en « palets » pour la fabrication de lentilles.

**Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis à  $10^{-2}$  sauf indication contraire de la partie B**

**A. Loi binomiale et loi de Poisson**

Dans un lot de ce type de palets, 2 % des palets ne sont pas conformes pour le rayon de courbure.

On prélève au hasard 50 palets de ce lot pour vérification du rayon de courbure. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 palets.

On considère le variable aléatoire  $X$  qui, à tout prélèvement de 50 palets, associe le nombre de palets non conformes pour le rayon de courbure.

1. Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, un palet et un seul ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un palet ne soit pas conforme pour le rayon de courbure.
4. On considère que la loi suivie par la variable aléatoire  $X$  peut être approchée par une loi de Poisson.  
Déterminer le paramètre  $\lambda$  de cette loi de Poisson.
5. On désigne par  $Y$  une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  où  $\lambda$  est la valeur obtenue au 4..  
Calculer  $P(Y = 1)$  et  $P(Y \leq 1)$ .

**B. Évènements indépendants**

Dans cette partie, on donnera les valeurs exactes des probabilités.

À l'issue de la fabrication, les lentilles peuvent présenter deux types de défauts :

- une puissance défectueuse,
- une épaisseur défectueuse.

On prélève une lentille au hasard dans la production d'une journée.

On note  $A$  l'évènement : « la lentille présente une puissance défectueuse »,

On note  $B$  l'évènement : « la lentille présente une épaisseur défectueuse ».

On admet que les probabilités des évènements  $A$  et  $B$  sont  $P(A) = 0,03$  et  $P(B) = 0,02$  et on suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement  $E_1$  : « la lentille prélevée présente les deux défauts ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement  $E_2$  : « la lentille prélevée présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement  $E_3$  : « la lentille prélevée ne présente aucun défaut ».

4. Calculer la probabilité de l'évènement  $E_4$  : « la lentille prélevée présente un seul de deux défauts ».

Puisque les évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants, on peut admettre que les évènements  $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants et les évènements  $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

### C. Test d'hypothèse

Les palets utilisés pour la fabrication des lentilles doivent avoir un diamètre de 9,80 millimètres.

Dans cette partie, on se propose de contrôler la moyenne  $\mu$  de l'ensemble des diamètres de palets d'une importante livraison reçue par l'entreprise.

On note  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque palet prélevé au hasard dans la livraison, associe son diamètre.

La variable aléatoire  $Z$  suit la loi normale de moyenne inconnue  $\mu$  et d'écart type  $\sigma = 0,13$ .

On désigne par  $\bar{Z}$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 palets prélevé dans la livraison, associe la moyenne des diamètres de ces palets (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).

L'hypothèse nulle est  $H_0$  : «  $\mu = 9,80$  ». Dans ce cas les palets de la livraison sont conformes pour le diamètre.

L'hypothèse alternative est  $H_1$  «  $\mu \neq 9,80$  ».

Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

- Justifier le fait que, sous l'hypothèse nulle  $H_0$ ,  $\bar{Z}$  suit la loi normale de moyenne 9,80 et d'écart type 0,013.
- Sous l'hypothèse nulle, déterminer le nombre réel  $h$  positif tel que :

$$P(9,80 - h \leq \bar{Z} \leq 9,80 + h) = 0,95.$$

- Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
- On prélève un échantillon de 100 palets et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des diamètres est  $\bar{z} = 9,79$ .  
Peut-on, au seuil de risque de 5 %, conclure que les palets de la livraison sont conformes pour le diamètre ?

### Exercice 2

10 points

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

#### A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' - y = e^x$$

où  $y$  est une fonction de la variable réelle  $x$ , définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et  $y'$  sa fonction dérivée.

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E_0) : y' - y = 0$ .
- Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = xe^x$ .  
Démontrer que la fonction  $h$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$ .
- En déduire les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .

**B. Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x + 1)e^x.$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où l'unité graphique est 2 cm,

1.
  - a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - b. On admet que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
  - c. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b..
2.
  - a. Démontrer que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (x + 2)e^x$ .
  - b. Établir le tableau de variations de  $f$ .
3.
  - a. Écrire une équation de la tangente T à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.
  - b. Construire sur la feuille de copie quadrillée T et  $\mathcal{C}$ .

**C. Calcul intégral**

1. Justifier que la fonction  $f$  définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A. Donc, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = f'(x) - e^x$ .
2. En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $a$  un nombre réel strictement inférieur à  $-2$ . On note  $I = \int_a^{-2} f(x) dx$ .
  - a. Démontrer que  $I = -ae^a - 2e^{-2}$ .
  - b. En déduire l'aire  $\mathcal{A}$ , en  $\text{cm}^2$ , de la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = -4$  et  $x = -2$ .
  - c. Donner la valeur approchée arrondie à  $10^{-2}$  de cette aire.