∽ Brevet de technicien supérieur ∾
Opticien lunetier session 2005

Exercice 1 **11 points**

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande chaîne de magasins d'optique, on s'intéresse aux stocks de montures de lunettes.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} .

Partie A

Un des stocks est constitué de montures du modèle M_1, provenant de deux fabricants, notés « fabricant 1 » et « fabricant 2 ».
On admet que 1 % des pièces provenant du fabricant 1 sont défectueuses et que 2 % des pièces provenant du fabricant 2 sont défectueuses.
Le fabricant 1 a fourni 60 % de ce stock et le fabricant 2, le reste.
On prélève au hasard une monture dans le stock. Toutes les montures ont la même probabilité d'être prélevées.
On définit les évènements suivants :

A : « la monture provient du fabricant 1 » ;
B : « la monture provient du fabricant 2 » ;
D : « la monture est défectueuse ».

1. Déterminer les probabilités $P(A)$, $P(B), P_A(D)$, $P_B(D)$. (On rappelle que $P_A(D) = P(D/A)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que l'évènement A est réalisé).
2. En déduire $P(D \cap A)$ et $P(D \cap B)$.
3. Calculer $P(D)$.
4. Déterminer la probabilité qu'une monture provienne du fabricant 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Partie B

Un autre stock est constitué de montures du modèle M_2. On note E l'évènement « une monture prélevée au hasard dans un stock du modèle M_2 est défectueuse ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est $0,02$.
On prélève au hasard 50 montures dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 montures.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 montures, associe le nombre de montures défectueuses parmi ces 50 montures.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune des 50 montures ne soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux montures soient défectueuses.

Partie C

Dans ce qui suit, on s'intéresse au poids, en grammes) des montures du modèle M_3.

Une monture de ce modèle est considérée comme conforme pour le poids si celui-ci est, en grammes, compris entre 99 et 101.
On note L la variable aléatoire qui, à chaque monture prélevée au hasard dans un lot très important de montures du modèle M_3, associe son poids.
On suppose que L suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type $0,5$.
Déterminer, à l'aide de la table du formulaire, la probabilité qu'une monture prélevée au hasard dans le lot soit conforme pour le poids.

Partie D

Dans cette partie, on veut contrôler la moyenne μ de l'ensemble des poids des montures du modèle M_4 constituant une livraison.

On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque monture tirée au hasard dans la livraison, associe son poids, en grammes.

On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\sigma = 0,5$. On désigne par $\overline{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 montures de modèle M_4, prélevé dans la livraison, associe la moyenne des poids de ces montures (la livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
L'hypothèse nulle est $\mathrm{H}_0 : \mu = 100$. Dans ce cas les montures de modèle M_4 de la livraison sont conformes. L'hypothèse alternative est $\mathrm{H}_1 : \mu \neq 100$.
Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Justifier que, sous l'hypothèse nulle H_0, Y suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type $0,05$.
2. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le nombre réel positif h tel que :
   $P(100 - h \leqslant Y \leqslant 100 + h) = 0,95$.
3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.
4. On prélève un échantillon de 100 montures et on observe que, pour cet échantillon, la moyenne des poids est $\overline{y} = 100,032$.
   Peut-on, au seuil de signification de $0,05$, conclure que les montures de la livraison sont conformes pour le poids ?

Exercice 2 **9 points**

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \qquad y' - y = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et y' la fonction dérivée de y.

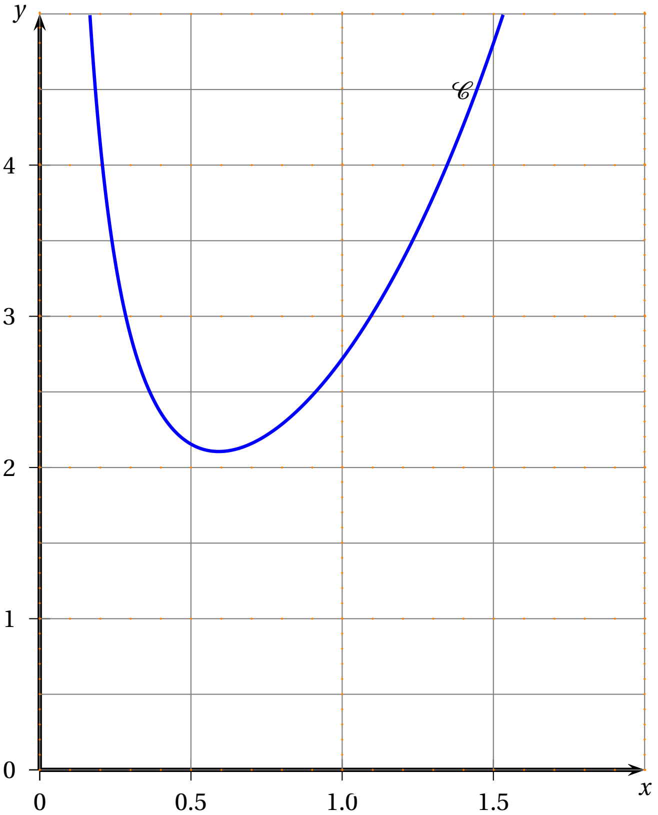
1. Résoudre, sur $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation différentielle $(E_0)\ : y' - y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
   $$h(x) = \mathrm{e}^{x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right).$$
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(1) = 2\text{e}$.

Partie B : étude d'une fonction

Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \text{e}^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$. On remarque que h est la fonction définie dans la partie **A. 2.**.

Une représentation graphique $\mathscr{C}$ de h, dans un repère orthogonal, où l'unité graphique est 4 centimètres sur l'axe des abscisses et 2 centimètres sur l'axe des ordonnées, est donnée ci-après.



1. a. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x)$.

b. Vérifier que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $h(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x}(1 + x\ln x)$.

En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0} h(x)$.

c. Que peut-on déduire du **b.** pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on pose : $g(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \ln x$.

a. On admet que g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que son tableau de variation est :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α, sur $[0,5\,;\,0,6]$.

b. Déterminer une valeur approchée de α arrondie à 10^{-2}.

c. En déduire le signe de $g(x)$ lorsque x varie dans $]0\,;\,+\infty[$.

d. Vérifier que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $h'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, où h' est la dérivée de la fonction h définie au **2.** de la partie A.

e. Déduire de ce qui précède le signe de $h'(x)$ lorsque x varie dans $]0\,;\,+\infty[$.

f. Donner le tableau de variations de la fonction h lorsque x varie dans $]0\,;\,+\infty[$.