Brevet de technicien supérieur
Opticien lunetier session 2003

Exercice 1 **10 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

   c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. **a.** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées seront arrondies à 10^{-2}.

x	-6	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$								

   c. Tracer la tangente T et la partie de la courbe $\mathscr{C}$ relative à l'intervalle $[-6\ ;\ 2]$.

4. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   a. On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 (x-1)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

   À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\mathrm{I} = 6 - 4\sqrt{\mathrm{e}}$.

   b. On note $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

   À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\mathrm{J} = -26 + 16\sqrt{\mathrm{e}}$.

   c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $\mathscr{A}$.
   En donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2}.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise fabrique des faces de lunettes en grande série. Dans chaque partie on étudie un modèle différent.

Dans cet exercice, sauf avis contraire, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

Partie A

Une face de lunettes de modèle A est conforme si sa longueur, en millimètres, est comprise entre 129 et 131.

1. On désigne par L_1 la variable aléatoire qui, à chaque face prélevée au hasard dans la production dune journée associe sa longueur.

   On suppose que L_1 suit la loi normale de moyenne 130 et d'écart type $0,5$.

   Calculer la probabilité qu'une face produite ce jour-là soit conforme,

2. On désigne par L_2 la variable aléatoire qui, à chaque face prélevée au hasard dans un stock associe sa longueur.
   On suppose que L_2 suit la loi normale de moyenne 130 et d'écart type σ inconnu.

   On note p la probabilité qu'une face de ce stock soit non conforme.

   Déterminer σ pour que l'on ait $p = 0,03$.

Partie B

On note E l'évènement : « une face prélevée au hasard dans un lot du modèle B est non conforme ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,04. On prélève au hasard 50 faces de lunettes de ce lot.
Le lot est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 faces de lunettes. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 50 faces de lunettes, associe le nombre de faces non conformes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins deux faces de lunettes soient non conformes.
3. On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de la variable X par une loi de Poisson.
   a. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
   b. On désigne par Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson définie au a.

   Calculer avec la précision de la table, la probabilité que le prélèvement contienne au plus quatre faces non conformes.

Partie C

Dans cette question on s'intéresse à la longueur des faces de lunettes de modèle C produites pendant une journée et on note μ la moyenne, inconnue, de ces longueurs.

Soit $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 64 faces de lunettes prélevées au hasard et avec remise dans la production des faces de modèle C de la journée considérée, associe la moyenne des longueurs des faces de cet échantillon.
On suppose que $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$ avec $\sigma = 0,48$.
On mesure la longueur, exprimée en millimètres, de chacune des 64 faces d'un échantillon prélevé au hasard et avec remise dans la production de la journée des faces de modèle C.
On constate que la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de la moyenne $\overline{l}$ des longueurs des faces de cet échantillon est $\overline{l} = 130,088$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ.
2. Déterminer un intervalle de confiance centré en $\overline{l}$ de la moyenne μ, avec le coefficient de confiance 95 %.

3. On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement entre $129,970$ et $130,206$ ».

Peut-on déduire de ce qui précède qu'elle est vraie ?

On ne demande pas de justification.