Brevet de technicien supérieur Opticien lunetier session 2001

Exercice 1 **11 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) où y est une fonction de la variable réelle x, dérivable sur $[0, ; +\infty[$ et y' la dérivée de y :

$$y' + \frac{3}{4}y = \frac{9x+3}{16}.$$

1. Résoudre dans l'intervalle $[0, ; +\infty[$ l'équation différentielle « sans second membre »

$$y' + \frac{3}{4}y = 0.$$

2. Déterminer les constantes a et b telles que la fonction g définie sur l'intervalle $[0, ; +\infty[$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
4. Déterminer la solution particulière de f de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ pour $x = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère ormonormal d'unité graphique : 2 cm.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[0 ; +\infty[$, où f' est la fonction dérivée de f.
   b. En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation et préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.
3. Soit D la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, soit M et N des points respectifs de $\mathcal{C}$ et D de même abscisse x positive on note $y_M - y_N$ la différence (les ordonnées de M et de N.
   a. Déterminer le plus petit x pour lequel $y_M - y_N < 0,05$; en donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.
   b. Représenter $\mathcal{C}$ et D en tenant compte des résultats précédents
4. **a.** Montrer que $\displaystyle\int_0^3 \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}\right)$.
   b. En déduire, en cm^2, l'aire du plan ensemble des points P de coordonnées $(x ; y)$ vérifiant
   $$\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \leqslant y \leqslant f(x) \end{array}\right.$$
   Arrondir le résultat au mm.

Exercice 2 **9 points**

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendantes

Partie A

Le gérant du célèbre magasin d'optique OPTIPRIX dépose 120 chèques à sa banque. Les montants de ces chèques, libellés en euros, ont été regroupés en cinq classes.

Classes	[50 ; 60[	[60 ; 110[	[110 ; 140[	[140 ; 200[	[200 ; 280[
Effectifs	12	24	60	19	5

1. On prélève un chèque au hasard parmi les 120. Tous les chèques ont la même probabilité d'être tirés.

a. Donner, sous forme de fraction irréductible, la probabilité p_1 que ce chèque ait un montant appartenant à [200 ; 260[.

b. Donner de même la probabilité p_2 que ce chèque ait un montant appartenant à [110 ; 140[.

2. On prélève, au hasard et avec remise, un échantillon de 36 chèques parmi les 120 déposés à la banque. Soit X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement d'un tel échantillon, associe le nombre de chèques dont le montant appartient la classe [200 ; 280[.

On définit de même la variable aléatoire Y pour la classe [110 ; 140[.

a. Indiquer sans justification la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Donner son espérance et son écart-type arrondi au dixième.

b. Indiquer de même sans justification la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y. Donner son espérance et son écart-type.

3. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X peut-être approchée par la loi de Poisson de paramètre $1,5$.

On note X_1 une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.

Calculer, avec cette approximation, la probabilité d'obtenir au moins trois chèques d'un montant appartenant à la classe [200 ; 280[(arrondir le résultat au centième).

4. On considère que la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y peut-être approthèe par la loi normale de moyenne 18 et d'écart-type 3.

On note Y_1 une variable aléatoire qui suit cette loi normale.

Calculer, avec cette approximation, la probabilité d'obtenir entre 15 et 21 chèques d'un montant appartenant à la classe [110 ; 140[, c'est à dire $P(14,5 \leqslant Y_1 \leqslant 21,5)$.(arrondir le résultat au centième),

Partie B

Dans cette partie on s'intéresse au stock des chèques déposés à la banque au cours du dernier mois.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque chèque prélevé au hasard dans le stock, associe son montant en euros. On considère que cette variable aléatoire Z suit la loi normale de moyenne inconnue m et d'écart-type 30.

On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire et avec remise de 100 chèques, associe le montant moyen de ces 100 chèques. On se propose de construire un test d'hypothèse pour accepter ou refuser l'affirmation du comptable « Le montant moyen des chèques déposés au cours du dernier mois est de 120 euros. »

L'hypothèse nulle H_0 est : $m = 120$.

L'hypothèse alternative H_1 est $m = 120$.

Le seuil de signification du test est fixé à $0,05$.

1. Justifier que, sous hypothèse nulle H_0, $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 3.

2. Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer, en la justifiant, la valeur du réel h tel que

$$P(120 - h \leqslant \overline{Z} < 120 + h) = 0,95.$$

3. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

4. Utilisation du test
Pour un échantillon de 100 chèques, on obtient une moyenne $z = 125$.
Peut-on accepter, au seuil de risque 5 %, l'affirmation du comptable ?