BTS Informatique de gestion obligatoire
novembre 2000 - Nouvelle–Calédonie

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Exercice 1 **5 points**

Une entreprise veut créer un site Internet comportant 5 pages A, B, C, D, E.
La structure des pages vérifie les conditions suivantes :

- La page A est la page d'accueil et sur chacune des autres pages figure un bouton permettant de revenir directement à la page d'accueil.
- On peut passer directement de la page A aux autres pages, sauf à la page E.
- On peut passer directement de la page B à la page E et de la page E à la page C.

1. Dessiner une représentation du graphe orienté associé au site.

2. Vérifier que la matrice d'adjacence M du graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les deux matrices booléennes M^2 et M^3. Quelle est la signification des « 1 » présents dans la matrice M^3 ?

4. On admet que la matrice $M^3 = M \times M \times M$, où $\times$ désigne la multiplication des matrices, peut s'écrire

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 ayant pour origine B et pour extrémité A. Ecrire ces chemins.

b. Écrire les trois circuits de longueur 3.

Exercice 2 **7 points**

Une société s'occupe de la saisie informatique de documents. Pour chaque document, une première saisie est retournée, pour vérification, au client correspondant.
Les résultats demandés seront donnés sous forme de valeurs décimales arrondies à 10^{-3}.

Partie A

Pour chaque document, le délai de retour de la première saisie vers le client est fixé à 2 semaines. Une étude statistique a montré que la probabilité qu'une saisie choisie au hasard soit effectivement retournée au client dans le délai fixé est égale à 0,9.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de n saisies choisies au hasard par tirage avec remise, associe le nombre de saisies pour lesquelles le délai de retour n'a pas été respecté.

1. **a.** Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?

   b. Pour cette question, on suppose que $n = 20$. Calculer la probabilité $P(X = 2)$.

2. Pour cette question, on suppose que $n = 100$. On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi de Poisson.

   a. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.

   b. En utilisant cette loi de Poisson, calculer une valeur approchée de chacune des probabilités $P(X = 4)$ et $P(x > 2)$.

Partie B

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque saisie retournée et choisie au hasard par tirage avec remise, associe le nombre d'erreurs décelées dans cette saisie par le client correspondant.
On admet que Y suit une loi normale de moyenne 30 et d'écart type 8.

1. Calculer la probabilité $P(25 \leqslant Y \leqslant 35)$.
2. Déterminer le plus petit nombre entier n_0 tel que $P(Y \geqslant n_0) \leqslant 0,945$.

Exercice 3 **8 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x+3)\left(\mathrm{e}^{-x} - x + 6\right).$$

I Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = (-x-2)\mathrm{e}^{-x} - 2x + 3.$$

On donne le tableau de variations de g :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1. Déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
2. **a.** Reproduire et compléter le tableau suivant (donner les résultats sous forme décimale, arrondis à 10^{-3} près) :

x	0,88	0,89	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94	0,95
$g(x)$								

   b. En déduire un encadrement de α, d'amplitude 10^{-2}.

II Étude de f

1. **a.** Étudier la limite de f en $+\infty$.

   b. Vérifier que, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ en prenant $0,92$ pour valeur approchée de α.

d. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,6]$, $f(x) > 0$.

2. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).
Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

III Calcul intégral

1. Démontrer que la fonction F, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x) = (-x-4)\mathrm{e}^{-x} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 18x,$$

est une primitive de f.

2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Donner une interprétation graphique du résultat obtenu, en l'illustrant sur le tracé précédent.