Brevet de technicien supérieur
Informatique de gestion session 2004

Épreuve obligatoire

Exercice 1 **6 points**

Partie A.

Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que : $A^2 = A \times A$, $A^3 = A^2 \times A$, $A^4 = A^3 \times A$ et $A^5 = A^4 \times A$.

1. Calculer les produits matriciels A^2 et A^3.
2. Vérifier que $A^3 = 2A^2 - I$.

Partie B

Soit $(\mathbb{G})$ le graphe à 3 sommets : $(a,\ b,\ c)$ dont la matrice d'adjacence est A.

1. Dessiner $(\mathbb{G})$.
2. Quelle et l'interprétation de 19 dans la matrice $A^5 = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 19 & 8 \end{pmatrix}$?
3. On choisit au hasard (avec équiprobabilité) un chemin de longueur 5 dans le graphe $(\mathbb{G})$.
   Quelles sont, arrondies à 10^{-2} près, les probabilités des évènements suivants :
   C1 : « Le chemin se termine par a » ?
   C2 : « Le chemin commence par c et se termine par a » ?
   C3 : « Le chemin est un circuit » ?

Exercice 2 **7 points**

Au rayon location d'un grand magasin, on loue à la semaine des machines-outils, et on se propose d'étudier la rentabilité de ce service.

Partie A. Étude du coût de fonctionnement

On suppose que le coût de fonctionnement hebdomadaire (en centaines d'euros) correspondant à la location de n machines est donné par

$$C(n) = 4n + 9 - 20\ln(0,2n+1) \quad (n \text{ entier naturel}).$$

1. Calculer, en arrondissant à 1 € près, $C(10)$ et $C(20)$.
   Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de machines louées ?
2. On pose $c(x) = 4x + 9 - 20\ln(0,2x+1)$ (x réel positif ou nul).
   Calculer $c'(x)$ et vérifier que $c'(x) = \dfrac{0,8x}{0,2x+1}$.
   En déduire le sens de variation du coût.

Partie B. Étude de la rentabilité

Chaque machine est louée 300 € par semaine.

1. Expliquer pourquoi le bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) correspondant à la location de n machines est donné par :

$$B(n) = -n - 9 + 20\ln(0,2n+1) \quad (n \text{ entier naturel}).$$

2. On pose $b(x) = -x - 9 + 20\ln(0,2x+1) \quad (x$ réel positif ou nul).

   a. Calculer $b'(x)$ et vérifier que $b'(x) = \dfrac{-0,2x+3}{0,2x+1}$.

   b. Étudier le sens de variation de la fonction b sur l'intervalle $[0\,;40]$.

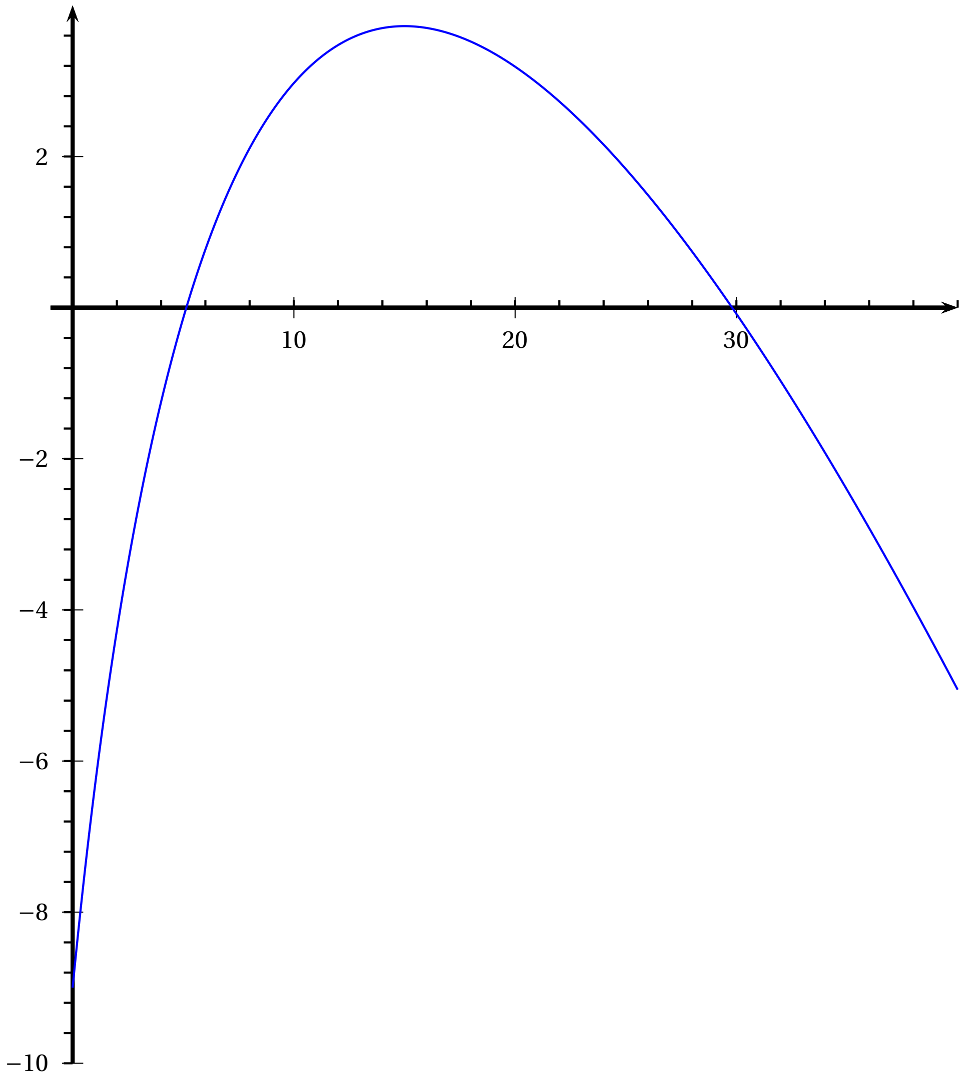
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction b. (on donnera les arrondis, à 10^{-2} près, des valeurs particulières)

3. *On donne, page suivante, la courbe représentative de la fonction b.*

   En vous aidant du graphique, dire

   a. Combien le magasin doit louer de machines par semaine pour que le bénéfice réalisé soit positif.

   b. Quel est, arrondi à un euro près, le bénéfice maximal réalisable en une semaine,


2
−2
−4
−6
−8
−10
10
20
30

Exercice 3 **7 points**

Tous les résultats des calculs de probabilités demandés dans cet exercice seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Les questions A., B., C. peuvent être traitées séparément.

Une entreprise fabrique des articles dont le prix de vente unitaire est 28 € et le coût de revient unitaire est 22 €. On admet que le nombre X d'articles vendus par an est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(12\,000~;~3\,000)$.

Partie A

1. Quelle est la probabilité de fabriquer moins de15 000 articles par an ?
2. Déterminer, arrondi à 100 unités près, le nombre réel α qui vérifie $P(X > \alpha) = 0,75$.
   Interpréter ce nombre.

Partie B

Les charges annuelles de l'entreprise sont de 48 000 €, et on note Y son bénéfice annuel en euros.

1. Justifier la relation : $Y = 6X - 48\,000$.
2. Quelle est la probabilité que le bénéfice annuel de l'entreprise soit positif ?

Partie C

En 2005 l'entreprise compte fabriquer 10 000 articles et en se basant sur les années antérieures, elle table sur un taux de défectuosité de 0,003. On suppose l'indépendance entre les états (défectueux ou non) des articles. Ces articles seront vendus par lots de 200. Soit Z le nombre aléatoire d'articles défectueux présents dans un lot.

1. Justifier que Z suit la loi binomiale $\mathcal{B}(200~;~0,003)$.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a. Dans un lot, aucun article n'est défectueux.
   b. Dans un lot, au moins deux articles sont défectueux.
3. On admet que Z peut être approchée par une loi de Poisson Z' de même espérance mathématique que Z.
   a. Calculer le paramètre λ de Z'.
   b. En utilisant la loi de Z' déterminer avec la précision de la table, la probabilité qu'un lot contienne moins de 5 articles défectueux.