∽ BTS Informatique de gestion ∽ Polynésie mai 2009

Durée : 1 heure | coefficient : 1

ÉPREUVE FACULTATIVE

EXERCICE 1 **7 points**

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}},$$

où y désigne une fonction numérique de la variable réelle x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et où y' désigne sa fonction dérivée.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$ est une solution particulière de l'équation (E).
3. Résoudre l'équation (E).
4. Déterminer la solution g de l'équation (E) vérifiant la condition : $g(0) = 0$.

EXERCICE 2 **13 points**

Une usine fabrique des composants électroniques A et B. Les deux variables aléatoires réelles T_A et T_B qui associent aux composants A et B leur temps de bon fonctionnement respectifs exprimés en heures suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_A et λ_B.

Dans l'exercice, toutes les probabilités seront arrondies au millième.

1. Pour le composant A, on sait que l'espérance de vie (ou M. T. R. F.) est de 25 000 heures.
   a. Quelle est la valeur du paramètre λ_A ?
   b. Au bout de combien de temps 30 % des composants A auront-iIs leur première défaillance ? (Arrondir à l'heure.)
2. Pour le composant B, on donne $\lambda_B = 0{,}000\,1$.
   a. Quelle est l'espérance de vie (ou M. T. B. F.) du composant B ?
   b. Quelle est la probabilité qu'un composant B fonctionne plus de 10 000 heures ?
   c. Quelle est la probabilité qu'il ait sa première défaillance entre 5 000 et 10 000 heures ?
   d. Sachant qu'il a fonctionné 5 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne entre 5 000 et 10 000 heures ?
3. On monte deux composants B en série. (Pour que le montage fonctionne, il faut que les deux composants fonctionnent.) On suppose que les risques de panne sont indépendants d'un composant à l'autre.
   a. Déterminer, pour un tel montage, la fonction de fiabilité R définie pour tout réel t par : $R(t) = P(T \geqslant t)$.
   b. En déduire l'espérance de vie (ou M. T. R. F.), exprimée en heures de ce système.

4. Dans cette question. on met deux composants B en parallèle. (Pour que ce montage soit en panne, il faut que les deux composants soient en panne.) On suppose à nouveau que les risques de panne sont indépendants.

   a. Déterminer pour un tel montage, la fonction de défaillance F définie pour tout réel t par : $F(t) = P(T \leqslant t)$.

   b. Quelle est la probabilité pour que ce montage tombe en panne avant 10 000 heures ?