Brevet de technicien supérieur novembre 2007 - Informatique de gestion Nouvelle–Calédonie

ÉPREUVE FACULTATIVE

Durée : 1 heure | Coefficient : 1

Exercice 1 **13 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A Une entreprise est spécialisée dans la production d'un type de machine agricole. On note $C(x)$ le coût total, en milliers d'euros, de la production de x machines. On suppose que la fonction de coût total C est définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et qu'elle est solution, pour x réel positif de l'équation différentielle

$$4C'(x) - C(x) = 5x - 80.$$

De plus les frais fixes, correspondant à $C(0)$,s'élèvent à 70 milliers d'euros.

On considère l'équation différentielle (E) : $4y' - y = 5x - 80$, l'inconnue y étant une fonction de la variable x définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E_0) : $4y' - y = 0$.
2. Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction φ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $\varphi(x) = ax + b$, est solution de (E).
3. En déduire la solution générale de l'équation (E).
4. Déduire des questions précédentes l'expression de $C(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 10\text{e}^{\frac{1}{4}x} - 5x + 60.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Écrire le développement limité de la fonction : $t \longmapsto \text{e}^t$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Démontrer qu'alors le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0 s'écrit :

$$f(x) = 70 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{16}x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ avec} \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

3. Utiliser ce résultat pour donner l'équation de la tangente (T) à Γ en son point d'abscisse 0, et préciser la position de (Γ) par rapport à (T) au voisinage de ce point.

Exercice 2 **7 points**

On admet que la durée d'attente, en minutes, au départ d'une certaine remontée mécanique dans une station de sports d'hiver, est, en période de vacances scolaires d'hiver, une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

1. Calculer, en minutes, le temps moyen d'attente au départ de cette remontée mécanique.

Pour les questions suivantes, les résultats seront donnés arrondis à la deuxième décimale.

2. Calculer la probabilité d'attendre au départ de cette remontée mécanique :

a. moins de 10 minutes ;

b. plus de 30 minutes.

3. Calculer la probabilité que le temps d'attente au départ de cette remontée mécanique soit compris entre 10 et 30 minutes.

4. Un skieur arrive au départ de la remontée mécanique ; un panneau indique que le temps d'attente est d'au moins 10 minutes. Calculer la probabilité qu'il soit inférieur à 30 minutes.