∽ Brevet de technicien supérieur Polynésie ∾ session mai 2010 - Informatique de gestion

Épreuve obligatoire

Exercice 1 **4 points**

Première partie

On considère la matrice carrée d'ordre 5 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Recopier et compléter les matrices :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(On rappelle que $A^2 = A \times A$ et que $A^4 = A^2 \times A^2$)

Deuxième partie

Soit (**G**) le graphe à 5 sommets (a, b, c, d, e) dont la matrice d'adjacence est A.

1. D'après les calculs de la première partie :
   a. Combien existe-t-il de chemins de longueurs 2 ayant pour origine le sommet c ?
   b. Existe-t-il dans ce graphe un chemin hamiltonien ?
2. Faire le tableau des prédécesseurs du graphe (**G**). Donner le niveau de chacun des sommets.
   On pourra par exemple utiliser l'algorithme suivant :
   — les sommets sans prédécesseur sont de niveau 0 ;
   — on barre les sommets de niveau 0. Les sommets qui n'ont alors plus de prédécesseur sont de niveau 1 ;
   — on barre les sommets de niveau 1. Les sommets qui n'ont alors plus de prédécesseur sont de niveau 2 ;
   — on continue jusqu'à ce qu'on ait établi le niveau de chaque sommet.
3. Dessiner le graphe CG) ordonné par niveau.

Exercice 2 **10 points**

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis au millième.

La société « Tournesol » construit et commercialise son « Triphone » : nouvel appareil assurant les fonctions d'un ordinateur portable, d'un téléphone portable et d'un agenda électronique. Les pourcentages des ventes de ce nouvel appareil au sein du segment « haut de gamme » sont donnés, au fil des semaines, dans le tableau ci-dessous.

x_i : rang de la semaine	0	1	2	3	4	5	6
y_i : pourcentage des ventes	0,3	1,1	2,2	4,1	7,4	12,5	17,9

Première partie : recherche d'une première modélisation

1. Représenter sur papier millimétré le nuage de points défini par la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)_{i=1,\ldots,7}$. On prendra comme unités graphiques :

1 cm pour 1 semaine en abscisses (entre 0 et 15)

1 cm pour 2 % en ordonnées (entre 0 et 40)

2. La disposition de ces points suggérant qu'un ajustement affine n'est pas le mieux adapté à la situation, on s'intéresse à la série statistique $(x_i\ ;\ z_i)_{i=1,\ldots,7}$ où, $z_i = \ln y_i$ pour $i = 1, \ldots, 7$.

Reproduire et compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	0,3	1,1	2,2	4,1	7,4	12,5	17,9
$z_i = \ln y_i$							

3. À l'aide de la calculatrice, donner le coefficient de corrélation des séries (z_i) et (x_i) et interpréter ce résultat.

4. À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de z en x.

5. Montrer dans ces conditions que y peut s'exprimer en fonction de x, à l'aide de la fonction f définie par

$$f(x) = 0,472\mathrm{e}^{0,655x}.$$

6. Calculer $f(9)$. Que penser de ce résultat ?

Deuxième partie : recherche d'une meilleure modélisation

On décide d'envisager une autre modélisation et pour cela on considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{30}{1+60\mathrm{e}^{-0,75x}}$$

1. Étude du sens de variation de la fonction g

a. Montrer que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $g'(x) = \dfrac{1350\mathrm{e}^{-0,75x}}{\left(1+60\mathrm{e}^{-0,75x}\right)^2}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$; et en déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Étude des limites

a. Déterminer la limite, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-0,75x}$ et en déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

b. Quelle interprétation graphique peut-on donner de ce résultat ?

c. Traduire ce résultat en terme d'évolution des pourcentages de ventes du « Triphone ».

3. Représenter graphiquement la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$ dans le même repère que le nuage de points précédent.

4. Les objectifs commerciaux du « Triphone »sont atteints lorsque le pourcentage des ventes atteint 25 % du segment « haut de gamme ».

Résoudre graphiquement l'équation $g(x) = 25$ et préciser à partir de quelle semaine les objectifs commerciaux sont atteints. (On fera figurer sur le graphique tous les traits indiquant la méthode de lecture).

Exercice 3 **6 points**

Le « Triphone »est équipé d'une batterie révolutionnaire de longue durée, mais dont les performances sont encore irrégulières.

Première partie *Dans cette partie, les résultats seront donnés avec la précision de la table*

Une batterie étant choisie au hasard dans le stock de l'entreprise, on admet que son autonomie est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $m = 12$ heures et d'écart-type $s = 2$ heures.

1. Calculer la probabilité $p(X \leqslant 15)$ que l'autonomie de la batterie soit inférieure à 15 heures.
2. Calculer la probabilité que l'autonomie de la batterie soit supérieure à 8 heures.
3. Déterminer le nombre réel positif h tel que $p(12 - h \leqslant X \leqslant 12 + h) = 0,95$.

Deuxième partie *Dans cette partie, les résultats seront arrondis au dix millième*

Pour assurer sa suprématie sur la concurrence, la société « Tournesol »décide de ne pas commercialiser les batteries dont l'autonomie serait inférieure à 8 heures. On a déterminé statistiquement que ces batteries représentent 2 % de la production.
À la sortie de la chaîne de fabrication, on prélève un lot de 50 batteries. La production de batteries est suffisante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un prélèvement successif avec remise.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 50 batteries prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de batteries non commercialisables.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ? Donner les paramètres de cette loi.
2. Quelle est la probabilité qu'il y ait dans un tel lot exactement 2 batteries non commercialisables ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait dans un tel lot au moins 2 batteries non commercialisables ?

Troisième partie *Dans cette partie, les résultats seront donnés avec la précision permise par la table*

On prélève cette fois un lot de 200 batteries, exactement dans les mêmes conditions que dans la deuxième partie. On note Y' la variable aléatoire qui fait correspondre à chaque lot le nombre de batteries non commercialisables.

1. On admet que cette variable aléatoire Y' peut être approchée par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson. Démontrer que le paramètre de cette loi Z est 4.
2. Quelle est la probabilité qu'un lot ne contienne aucune batterie non commercialisable ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait dans un lot au plus trois batteries non commercialisables ?