

œ Brevet de technicien supérieur œ
Polynésie Informatique de gestion session 2006

A. P. M. E. P.

Exercice 1

4 points

Une entreprise assure la production de deux types de calculatrices C_1 et C_2 en quantités (hebdomadaires) respectives x et y .

Le coût des éléments installés et le nombre d'heures de travail sont donnés pour chaque calculatrice dans le tableau suivant :

	C_1	C_2
Coût des éléments (en €)	6	8
Nombre d'heures de travail	1	1,5

Un programme de production hebdomadaire peut se représenter par la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cette production occasionne un coût c et un nombre t d'heures de travail. Ces deux éléments sont donnés dans la matrice $Y = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$. Enfin on appelle A la matrice issue

du tableau : $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Écrire une égalité matricielle reliant A , X et Y qui traduit la production de l'entreprise.
2. Durant une semaine, l'entreprise a produit 200 calculatrices C_1 et 800 calculatrices C_2 . Par un calcul matriciel, déterminer le coût total et le nombre d'heures de travail pour la production de cette semaine.

Partie B

On note B la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

1. Effectuer le produit $B \times A$.
2. Montrer en transformant l'égalité $Y = A \times X$ que $B \times Y = X$.
3. Durant une autre semaine, l'entreprise fait face à un coût total de 8 400 € et 1 450 heures de travail.
Déterminer par le calcul matriciel le nombre de calculatrices de chaque type fabriquées au cours de cette semaine.

Exercice 2

6 points

Une entreprise de 20 salariés utilise un parc de 30 ordinateurs.

Les 30 ordinateurs fonctionnent de manière indépendante. On admet que la probabilité pour que dans une journée un ordinateur soit en panne est de 0,075.

1. Soit X la variable aléatoire qui, à un jour donné, associe le nombre d'ordinateurs en panne parmi tout le parc pendant cette journée.

Dans cette question, on fournira tous les résultats sous leur forme arrondie à 3 décimales.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X , justifier.
- b. Calculer la probabilité pour que, parmi les 30 postes, il y ait exactement 2 ordinateurs en panne.
- c. Calculer la probabilité pour que, parmi les 30 postes, il y ait au moins 2 ordinateurs en panne.

Pour la suite, les résultats seront donnés avec la précision permise par les tables.

2. Soit Y la variable aléatoire qui, à un jour donné, associe le nombre d'absents parmi les 20 salariés de l'entreprise. On suppose que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1,5.
 - a. Déterminer la probabilité pour qu'il n'y ait aucun absent.
 - b. Calculer la probabilité pour qu'il y ait au plus 2 absents.
 - c. Quel est le nombre moyen d'absents journalier ?
3. Soit D la variable aléatoire qui à chaque ordinateur du parc associe sa durée d'utilisation journalière exprimée en heures. On suppose que D suit la loi normale d'espérance 4 et d'écart type 0,2.
 - a. Calculer la probabilité pour que la durée d'utilisation journalière d'un ordinateur du parc soit supérieure à 4 h 30 min (on rappelle que 4 h 30 min = 4,5 heures).
 - b. Calculer la probabilité que la durée d'utilisation soit inférieure à 3 h 45 min.

Exercice 3

10 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; e^3]$ par

$$f(t) = t(a + b \ln t) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels.}$$

Partie A : détermination de a et b

On sait que f vérifie les deux conditions : $f(e) = 2e$ et $f(e^3) = 0$.

1. Montrer que a et b vérifient le système :
$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$$
2. Déterminer les valeurs de a et b .

Partie B : étude de la fonction f

On admet désormais que f est définie sur l'intervalle $]0 ; e^3]$ par

$$f(t) = 3t - t \ln t.$$

1. Étudier $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$.
2. Étude des variations de f :
 - a. Calculer la dérivée f' de f sur l'intervalle $]0 ; e^3]$.
 - b. Résoudre l'inéquation $2 - \ln t > 0$ sur l'intervalle $]0 ; e^3]$.
 - c. En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0 ; e^3]$ et dresser le tableau de variations de f .
 - d. Calculer la valeur exacte du maximum de f .

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (valeurs approchées arrondies au centième) :

t	1	2	4	6	8	12	16	20
$f(t)$								

4. Représenter la fonction f sur $]0 ; e^3]$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
5. Par lecture graphique, et avec la précision permise par cette lecture, indiquer quelles sont les valeurs de t pour lesquelles $f(t) \geq 4$.

Partie C : interprétation économique

Une société d'achats en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle « flash » qu'elle a organisée sur Internet.

Cette vente, d'une durée annoncée de 20 minutes, a provoqué sur son site un flux dont l'intensité a été variable en fonction du temps.

Si on note t le temps en minutes écoulé depuis le départ de l'opération, on admet que $f(t)$ est la mesure instantanée de ce flux, cette mesure étant exprimée en milliers d'euros par minute.

On suppose qu'aucun achat n'est possible pendant la première minute et que la somme totale, en milliers d'euros, transférée depuis la première minute et jusqu'à la fin des 20 minutes de la vente est modélisée par l'intégrale : $S = \int_1^{20} f(t) dt$.

- Donner une interprétation graphique de cette intégrale en l'illustrant sur le tracé précédent.
- Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par

$$G(t) = \frac{t^2}{2} \left(\ln t - \frac{1}{2} \right).$$

- Montrer que G est une primitive de la fonction g définie par $g(t) = t \ln t$.
- Donner une primitive F de f sur l'intervalle $[1 ; 20]$.
- Calculer la valeur exacte de $\int_1^{20} f(t) dt$.
- En déduire la valeur de la somme totale transférée depuis la première minute et jusqu'à la fin des 20 minutes (on donnera une valeur approchée arrondie à 10 € près).