Brevet de technicien supérieur
Polynésie Informatique de gestion session 2005

Exercice 1 **4 points**

On considère les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 & 0\\ 1 & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & 0\\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M^2, puis la matrice $B = M^2 - A - I$.
2. Dans la suite on pose $\alpha = 1$.

   Montrer que la matrice B est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Déterminer la matrice B^2.
4. La matrice B est la matrice adjacente d'un graphe orienté de sommets $a,\ b,\ c,\ d$.
   Donner une représentation géométrique du graphe orienté.
5. Combien y a-t-il de chemin(s) de longueur 2 ? Préciser leurs extrémités.

Exercice 2 **6 points**

Un laboratoire commercialise un test de dépistage d'une maladie. Une étude statistique a permis d'admettre que 5 % de la population est atteinte par cette maladie.
Le test n'est pas totalement fiable :

- lorsque le patient est malade, le test n'est positif que dans 95 % des cas,
- lorsque le patient n'est pas malade, le test est cependant positif dans 1 % des cas.

On note M l'évènement « le patient est malade », et T l'évènement « le test est positif ».
Les probabilités demandées seront arrondies au dix-millième.

Partie A

On considère un patient pris au hasard dans la population.

1. Représenter la situation décrite à l'aide d'un arbre ou d'un tableau.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement « le patient est malade et le test est positif ».
   Calculer $P(T)$.
3. Quelle est la probabilité que le patient soit malade sachant que le test est positif ?
4. Quelle est la probabilité que le patient soit malade sachant que le test est négatif ?
5. Le test est considéré comme défectueux si son résultat n'est pas en accord avec l'état réel du patient. Montrer que la probabilité de l'évènement D « le test est défectueux »est égale à 0,012.

Partie B

En vue d'un contrôle de qualité, le laboratoire constitue des échantillons de 50 tests tirés au hasard dans la production. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 articles.

1. Soit X la variable aléatoire qui associe, à tout échantillon de 50 tests, le nombre de tests défectueux.

a. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité que l'échantillon compte moins de 3 tests défectueux.

c. Calculer l'espérance mathématique et l'écart type dc cette loi.

2. On approche la loi de X par une loi de Poisson.

a. Quel est le paramètre de cette loi ?

b. En utilisant cette approximation, déterminer la probabilité que l'échantillon compte moins de 3 tests défectueux.

Exercice 3 **10 points**

Le service informatique d'une entreprise a modélisé le coût unitaire y (en centimes d'euro) d'une connexion, lorsque son réseau gère simultanément x centaines de connexions, par la fonction f définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$y = f(x) = \frac{e^{2x}+3}{6\left(e^x-1\right)}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal dont les unités graphiques sont 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

Partie A Étude d'une fonction auxiliaire g.

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = e^{2x} - 2e^x - 3.$$

1. Montrer que $g(\ln 3) = 0$.

2. Étude du signe de g.

a. Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

b. En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$. (On ne demande pas de calculer la limite de g en $-\infty$).

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$

Partie B Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

2. Montrer que $f(x) = \dfrac{e^x + \frac{3}{e^x}}{6 - \frac{6}{e^x}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{6\left(e^x-1\right)^2}$. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

4. Reproduire sur la copie et compléter le tableau de valeurs suivant. (*Les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie au centième*).

x	0,5	1	$\ln 3$	2	3
$f(x)$					

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

6. Pour combien de connexions simultanées, le coût unitaire de connexions est-il optimisé ? (On donner le résultat à une unité près).

Partie C Étude du coût moyen unitaire de connexion.

1. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$F(x)=\frac{2}{3}\ln\left(\mathrm{e}^x-1\right)+\frac{1}{6}\mathrm{e}^x-\frac{x}{2}$$

est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2. Déterminer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[\ln 3\,;\,2]$. On donnera la valeur exacte de m puis une valeur approchée arrondie au centième.

3. Quel est le coût unitaire moyen de connexion pour un nombre n de connexions simultanées vérifiant $110 \leqslant n \leqslant 200$?

(On donnera le résultat arrondi à 10^{-4} euro près en prenant $1,1$ comme valeur approchée de $\ln 3$).