BTS Informatique de gestion
Nouvelle-Calédonie novembre 2003

EXERCICE 1 **7 points**

Pour cet exercice, on fournira tous les résultats sous leur forme décimale, arrondie à 10^{-3} *près.*

Dans une ville dont la population est très jeune, on sait qu'il y a 39,2 % de mineurs (et par conséquent 60,8 % d'adultes). On considère des échantillons non exhaustifs (tirage au hasard et avec remise) de 100 personnes parmi les habitants de cette ville.

1. Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque échantillon de 100 personnes, le nombre d'adultes qu'il contient.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de cette série.

c. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 60)$. On prendra $\binom{100}{60} = 1{,}3746 \times 10^{28}$.

2. On approche la variable X par une variable Y suivant une loi normale $\mathcal{N}(m,\ \sigma)$. On précisera la valeur et la signification des paramètres m et σ.

3. Pour la suite de cet exercice, on prendra $m = 61$ et $\sigma = 4{,}9$.

a. On souhaite calculer une valeur approchée de $p(X = 60)$, en utilisant la variable aléatoire Y.

Pour cela, par correction de continuité, calculer $p(59{,}5 \leqslant Y \leqslant 60{,}5)$.

b. On veut calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins 55 adultes. Pour cela, calculer $p(Y \geqslant 54{,}5)$.

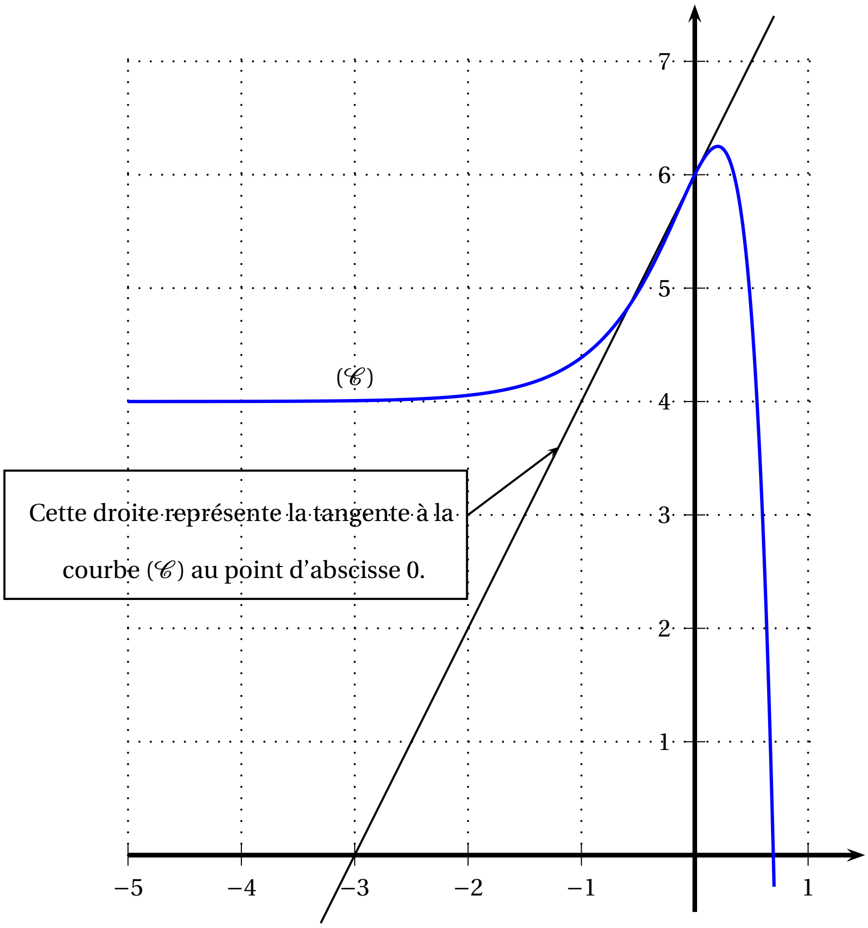
EXERCICE 2 **7 points**

Partie A

La courbe $(\mathscr{C})$ ci-dessous représente, dans un repère orthogonal, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 4 + a\mathrm{e}^{2x} + b\mathrm{e}^{4x}$$

où a et b sont des constantes à déterminer.



1. Lire graphiquement les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$. En déduire les valeurs de a et b.
2. Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) = \left(1+\text{e}^{2x}\right)\left(4-\text{e}^{2x}\right)$.

Partie B

1. f étant la fonction donnée dans la partie A, calculer la dérivée de f et déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point de cette courbe dont l'ordonnée est maximale.

   Compléter la figure ci-dessus par la tangente à $(\mathscr{C})$ en ce point.
2. Calculer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour $(\mathscr{C})$? Compléter la figure ci-dessus en conséquence.
3. En étudiant le signe de chacun des facteurs de $f(x)$, déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,\ln 2]$.
4. Calcul d'une intégrale
   a. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\ln 2} f(x)\,\text{d}x$.

EXERCICE 3 **6 points**

Le tableau ci-dessous est extrait d'une grille présentant les différents points d'une ville reliés par des lignes de transport en commun avec la durée des trajets en minutes. À ce tableau est associé un graphe dont les sommets sont A, B, C, D, E, F et G.

	A	B	C	D	E	F	G
A		8					3
B					4		
C						6	4
D	10		9				
E							
F		3					
G		7					

Par exemple, dans ce tableau, la cellule contenant le nombre 9 correspond à la durée (9 minutes) du trajet du bus reliant le point de départ de D au point d'arrivée C.

1. Réaliser le tableau des prédécesseurs de ce graphe, et déterminer le niveau de chacun des sommets.
2. Dessiner le graphe en ordonnant les sommets par niveaux et en marquant la longueur de chaque arc.
3. Déterminer le ou les trajet(s) de durée minimale permettant d'aller de D à E (on détaillera la méthode utilisée).