∽ Brevet de technicien supérieur ∾
novembre 2007 - Informatique de gestion
Nouvelle–Calédonie

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Durée : 3 heures Coefficient : 2

Exercice 1 **4 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On note P l'ensemble des professeurs p enseignant dans un lycée et E l'ensemble des élèves e de ce lycée.

On note $q(e,\ p)$ le prédicat : « l'élève e connaît le professeur p ».

1. Traduire par une phrase la proposition A suivante : « $\forall e \in E,\ \exists p \in P,\ q(e,\ p)$ ».
2. Écrire symboliquement la proposition B « II existe au moins un élève qui connaît tous les professeurs ».
3. Écrire symboliquement puis traduire par une phrase les propositions $\overline{\text{A}}$ et $\overline{\text{B}}$.

Partie B

Dans ce lycée, un élève selon ses activités, peut avoir des droits d'écriture sur le site Internet.

On définit les critères suivants :

t : « l'élève est dans une filière d'enseignement tertiaire » ;
d : « l'élève participe au bureau des délégués » ;
s : « l'élève est dans une section de techniciens supérieurs ».

1. M$^{\text{lle}}$ B. est en première dans une filière tertiaire et ne participe pas au bureau des délégués. Donner une expression booléenne traduisant la situation de M$^{\text{lle}}$ B.
2. Un élève a des droits d'écriture sur le site du lycée si :
   - il est dans une filière tertiaire et participe au bureau des délégués ou
   - il n'est pas dans une filière tertiaire et il est en section de technicien supérieur ou
   - il ne participe pas au bureau des délégués et il est en section de technicien supérieur dans une filière tertiaire -

   a. Déterminer l'expression booléenne D traduisant les conditions qui donnent un droit d'écriture sur le site.

   b. M$^{\text{lle}}$ B. a-t-elle des droits d'écriture sur le site Internet ?
3. En utilisant un tableau de Karnaugh (on mettra alors en évidence les regroupements utilisés) ou une table de vérité ou le calcul booléen, montrer que : $D = s + dt$. Traduire cette égalité par une phrase.

Exercice 2 **4 points**

Un immeuble de bureaux est équipé de deux ascenseurs A_1 et A_2 destinés aux visiteurs. Ces deux ascenseurs fonctionnent de façon indépendante.

1. On s'intéresse dans cette question au fonctionnement des deux ascenseurs.

On appelle F_1 l'évènement « l'ascenseur A_1 fonctionne sans panne durant un mois d'utilisation » et F_2 l'évènement « l'ascenseur A_2 fonctionne sans panne durant un mois d'utilisation ».

On considère que les évènements F_1 et F_2 sont indépendants, que la probabilité de F_1 est égale à $0,95$, et que la probabilité de l'évènement F_2 est égale à $0,98$.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

F : « les deux ascenseurs fonctionnent sans panne pendant un mois » ;

G : « au moins un des deux ascenseurs fonctionne sans panne pendant un mois ».

2. On s'intéresse dans cette question à l'utilisation des ascenseurs pendant une journée d'ouverture des bureaux.

On considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes se présentant devant les ascenseurs A_1 et A_2 pendant une durée fixée de 3 minutes (temps moyen de déplacement des ascenseurs dans les étages), lors d'une journée d'ouverture des bureaux aux heures d'affluence.

On admet que la variable X suit une loi normale de moyenne 22 et d'écart-type 4.

a. Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 12 et 29 personnes qui se présentent pendant un intervalle de temps de 3 minutes ?

b. L'ascenseur A_1 a une capacité maximum de 10 personnes, l'ascenseur A_2 une capacité maximum de n personnes. Comment doit-on choisir n pour que la probabilité qu'il y ait plus de $10+n$ personnes devant les ascenseurs pendant une période de 3 minutes soit inférieure à $0,05$?

Exercice 3 **12 points**

Dans ce problème on s'intéresse à la répartition des salaires dans deux entreprises.

Partie A

Dans cette partie, les valeurs approchées demandées seront données arrondies à 10^{-2} *près.*

Dans une entreprise A, on a relevé la répartition des salariés suivant leur salaire mensuel en euros.

Salaire mensuel	1 100	1 540	2 290	2 790	3 220	3 520
Nombre de salariés	15	25	25	15	15	5

1. a. Sur le document réponse, compléter le tableau 1.

b. On appellera masse salariale mensuelle la somme totale consacrée par l'entreprise aux salaires.

Quelle est la masse salariale mensuelle de cette entreprise ?

c. Les salariés étant classés en ordre croissant de leurs salaires, on peut déduire du tableau 1 que 40 % des salariés perçoivent 25 % de la masse salariale ; expliquer comment.

2. La répartition des salaires est modélisée par une fonction f définie de la façon suivante :

les salariés étant classés par ordre croissant de leurs salaires, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$ (où x représente le pourcentage de salariés), $f(x)$ est le pourcentage de la masse salariale perçue par ces salariés.

On note f_1 la fonction qui caractérise la répartition des salaires de l'entreprise A. Dans cette entreprise, par exemple, d'après la question précédente on a $f_1(0,4) = 0,25$.

a. Sur le document réponse compléter le tableau 2.

b. Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (d'unité graphique 10 cm), placer les points de coordonnées $\left(x\,;\, f_1(x)\right)$ pour les sept valeurs de x figurant dans ce tableau, on ne demande pas de relier ces points.

3. On approche la fonction f_1 par une fonction polynôme du second degré notée f_2.
On pose : $f_2(x) = 0,625x^2 + 0,375x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f_2 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

b. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ étudier le signe de $x - f_2(x)$.

c. En déduire la position de la courbe représentative de la fonction f_2 par rapport à la droite Δ d'équation : $y = x$.

d. Tracer sur le même graphique qu'au **3. b.** la droite Δ puis la courbe représentative de la fonction f_2 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie B

Pour une autre entreprise que l'on appellera l'entreprise B, la répartition des salaires est caractérisée par la fonction f_3 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_3(x) = x\text{e}^{2(x-1)}.$$

1. a. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a : $f'(x) = (2x+1)\text{e}^{2(x-1)}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f_3 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

2. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ on admet que : $x - f_3(x) \geqslant 0$.
En déduire la position de la courbe représentative de la fonction f_3 par rapport à la droite Δ d'équation : $y = x$.

3. Sur le graphique commencé à la partie A, tracer la représentation graphique de la fonction f_3.

Partie C

On dit que la répartition de la masse salariale est égalitaire lorsque tous les salaires sont égaux. Dans ce cas, t % des salariés perçoivent t % de la masse salariale. Une telle répartition est donc caractérisée par la fonction f_4 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f_4(x) = x$.

Pour une fonction f décrivant la répartition des salaires d'une entreprise, on s'intéresse au coefficient $\gamma = \displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\,\text{d}x$. Ce coefficient est un indicateur d'inégalité de la répartition des salaires dans l'entreprise.

1. Calculer le coefficient $\gamma_2 = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f_2(x)\right]\,\text{d}x$, où la fonction f_2 est celle définie à la partie A. (On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à la troisième décimale.)
Sur le graphique commencé à la partie A, hachurer la partie du plan dont l'aire en unités d'aires est égale à γ_2.

2. Soit la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\text{e}^{2(x-1)}.$$

a. Vérifier que F est une primitive de la fonction f_3 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ de la fonction h définie par : $h(x) = x - f_3(x)$.

b. En déduire la valeur de $\gamma_3 = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f_3(x)\right]\,\mathrm{d}x$.

(On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée arrondie à la troisième décimale.

c. Donner une interprétation graphique du nombre γ_3.

3. Quelle est la plus inégalitaire des distributions salariales des deux entreprises A et B correspondant respectivement à f_2 et à f_3 ?

Document réponse

Tableau 1 à compléter. Partie A 1. a.

Salaire mensuel	Nombre de salariés	Salaires cumulés	Nombre cumulé de salariés
1 100	15	16 500	15
1 540	25	55 000	40
2 290	25	112 250	
2 790	15		80
3 220	15	202 400	95
3 520	5	220 000	100

Tableau 2 à compléter. Partie A 2. a.

x	0	0,15	0,4	0,65	0,8	095	1
$f(x)$	0		0,25	0,51	0,7	0,92	1