Brevet de technicien supérieur novembre 2008 - Informatique de gestion Nouvelle–Calédonie

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Durée : 3 heures — Coefficient : 2

Exercice 1 — **6 points**

On considère les matrices :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ et }O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3 ; en déduire pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n.
(On rappelle que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $A^k = A^{k-1} \times A$.

2. À tout nombre réel x, on associe la matrice notée $M(x)$ où
$M(x) = 1 + xA + \dfrac{x^2}{2}A^2 \quad (R1)$.

a. Déterminer $M(0)$ et $B = M(4)$.

b. x et y étant deux nombres réels quelconques, calculer en utilisant la relation $(R1)$, le produit $M(x) \times M(y)$.

c. Montrer l'égalité : $M(x) \times M(y) = M(x + y)$. $\quad (R2)$.

3. Vérifier que $M(x) = \begin{pmatrix}1&x&\frac{x^2}{2}\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer le nombre réel x' tel que $M(x) \times M\left(x'\right) = 1$.
En déduire une matrice B' telle que $B \times B' = I$.

Exercice 2 — **5 points**

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes produit une fleur par an, la fleur est rose ou blanche.

Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est $\dfrac{3}{4}$ et la probabilité de donner une fleur blanche est $\dfrac{1}{4}$.

Au cours des années ultérieures, la floraison obéit aux règles suivantes définies pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n + 1$ elle donnera une fleur rose ;
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche alors, elle donnera, l'année $n + 1$, de façon équiprobable, une fleur rose ou une fleur blanche.

Partie A

n désigne un entier naturel non nul.
Pour une plante donnée, R_n désigne l'évènement : « la plante donne une fleur rose la n^{e} année ».

1. On note p_n la probabilité de l'évènement R_n ; on a donc $P(R_1) = p_1 = \dfrac{3}{4}$.

À l'aide des données de l'énoncé, déterminer la probabilité $p(R_2)$ d'obtenir une fleur rose la seconde année. (On pourra éventuellement s'aider d'un arbre pondéré).

2. On admet que la suite $\left(p_n\right)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence
$p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}$.
Soit $\left(q_n\right)_{n\geqslant 1}$ la suite définie pour tout entier naturel non nul n, par :
$q_n = p_n - 1$.

  a. Montrer que $\left(q_n\right)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$; calculer q_1.

  b. Déterminer q_n en fonction de n.

  c. En déduire p_n en fonction de n ; donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

3. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?

Partie B

Les plantes sont vendues par lots de 10 000.
Pour un lot donné de 10 000 plantes, on désigne par X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de plantes qui donneront la première année une fleur rose. On suppose que les plantes fleurissent indépendamment les unes des autres.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ainsi que les valeurs exactes de son espérance mathématique $E(X)$ et de son écart type $\sigma(X)$.

2. On décide d'approcher la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $m = 7500$ et $\sigma = 25\sqrt{3}$.

Sans tenir compte de la correction de continuité, utiliser cette approximation pour donner, arrondie au centième, la probabilité de l'évènement : « $7450 \leqslant X \leqslant 7550$ ».

Exercice 3 **9 points**

Partie A

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel positif x par :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x - 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. Déterminer $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$ ainsi que la limite de la fonction f lorsque x tend vers en $+\infty$.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et que $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  b. Démontrer que $0,15 \leqslant \alpha \leqslant 0,151$.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

1. Développer, réduire et ordonner $(1+X)^4$.

2. Dans toute la suite, r désigne un taux d'intérêt annuel. Ainsi, $r = 0,05$ correspond au taux de 5 %.

Pour un placement à intérêt composé, on sait alors que la valeur acquise S_4 d'un capital S au bout de quatre années est donnée par : $S_4 = S(1+r)^4$.

On étudie un deuxième type de placement de la somme S sur une durée de 4 années, dans les conditions suivantes : la somme S est rémunérée au taux $\dfrac{r}{2}$ pendant la 1re année, au taux r pendant la 2e année, au taux $\dfrac{3r}{2}$ pendant la 3e année, au taux $2r$ pendant la 4e année, mais les intérêts ne sont pas composés, de sorte qu'on totalise à l'issue des quatre années de placement :

- la somme initiale S ;
- les intérêts de la 1e année, dont le montant est $\dfrac{r}{2}S$;
- les intérêts de la 2e année, dont le montant est rS ;
- les intérêts de la 3e année, dont le montant est $\dfrac{3r}{2}S$;
- les intérêts de la 4e année, dont le montant est $2rS$.

a. Quelle somme T_4 obtient-on ainsi à la fin des quatre années de placement ?

b. Montrer que la différence $S_4 - T_4$, s'exprime par : $S_4 - T_4 = Sr \times f(r)$, où f est la fonction du A.

c. Déterminer, en utilisant la partie A, les valeurs de r pour lesquelles le deuxième placement est préférable, sur quatre ans, au placement à intérêt composé au taux d'intérêt r.