∽ Brevet de technicien supérieur ∾ Informatique de gestion session 2006

Exercice 1 **7 points**

Les parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Toutes les probabilité demandées seront arrondies au millième.

La coopérative « Le Val de Seule » produit et commercialise des légumes. Un service étudie le problème de la mise en bocal de tomates confites : le poids annoncé est de 500 g, et on décide qu'un bocal est « mal rempli » s'il pèse moins de 485 g. On admet que la variable aléatoire X qui, â chaque bocal, associe son poids en grammes, suit une loi normale d'espérance 500 et d'écart-type 12.

Partie A

1. Calculer la probabilité qu'un bocal soit mal rempli.
2. Calculer la probabilité $P(491 \leqslant X \leqslant 518)$
3. Déterminer le réel h tel que $P(500 - h \leqslant X \leqslant 500 + h) = 0,95$.
   Traduire ce résultat en français courant.

Partie B

Grâce à une politique de qualité, on a ramené le pourcentage de bocaux mal remplis à 2 %. Un contrôleur teste un lot de 200 bocaux prélevés sur la production (on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise).

1. On désigne par Z la variable aléatoire désignant le nombre de bocaux mal remplis dans ce lot.
   a. Quelle est la loi suivie par Z ? Justifier votre réponse.
   b. Donner l'espérance et l'écart-type de Z.
   c. Calculer $P(Z = 2)$.
2. On admet que Z peut être approchée par une variable Z' suivant une loi de Poisson.
   a. Donner la valeur du paramètre X de cette loi de Poisson.
   b. Déterminer la probabilité $P(Z' \geqslant 3)$.

Partie C

Les bocaux sont remplis sur deux chaînes de travail Alpha et Beta. La chaîne Alpha fournit 80 % des bocaux et la chaîne Beta en fournit 20 %.
Parmi les bocaux fournis par la chaîne Alpha, il y en 1 % de mal remplis.
La probabilité qu'un bocal fourni par la chaîne Bêta soit mal rempli est égale à un certain réel β.
Un bocal est choisi au hasard dans la production.
On note :

— A l'évènement : « le bocal a été rempli sur la chaîne Alpha »,
— B l'évènement : « le bocal a été rempli sur la chaîne Bêta »,
— M l'évènement : « le bocal a été mal rempli ».

1. Construire un arbre pondéré ou un tableau à double entrée illustrant la situation.

2. On a choisi un bocal mal rempli. Déterminer la probabilité qu'il ait été rempli sur la chaîne Alpha, sachant que $P(M) = 0,02$.
3. **a.** Calculer en fonction de β la probabilité $P(M)$.
   b. En déduire la valeur de β.

Exercice 2 **6 points**

Partie A

Étude théorique

On se propose de déterminer les puissances successives de la matrice M définie par
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

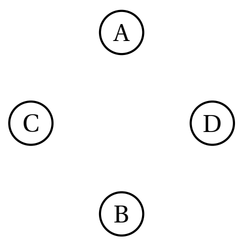
1. Calculer M^2, M^3 et M^4. Établir une relation simple entre M^4 et M^3.
2. On admet qu'il existe une suite numérique (a_n) telle que, pour tout $n \geqslant 3$, $M^n = a_n M^3$.
   Préciser la valeur de a_3 et a_4 et en calculant $M^{n+1} = M^n \times M$, montrer que la suite (an) est géométrique, donner sa raison.
3. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
4. En déduire que $M^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie B

Application

Monsieur ROBERT, agent commercial de la coopérative « Le Val de Seille »pour le Centre-Est, prospecte les quatre villes Auxerre, Beaune, Châtillon et Dijon, notées A, B, C, D. Ses déplacements sont repérés par la matrice d'adjacence M définie dans la partie A.

1. Va-t-il directement d'Auxerre à Beaune ?
2. Recopier et compléter le graphe ci-contre correspondant à M.
3. Quel est le nombre de chemins de longueur 3 allant de A à D. En faire la liste.
4. À l'aide de la partie A, déterminer le nombre de chemins de longueur 8 de ce graphe.
   Justifier votre réponse.



Exercice 3 **6 points**

Partie A

Étude d'une fonction

On donne la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par

$$f(x) = 216x - x^2 - 4000 \ln\left(\frac{x+12}{12}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
(unités graphiques : 1 cm pour 5 en abscisse et 1 cm pour 200 en ordonnée).

1. Calculer $f'(x)$ et montrer et que, sur l'intervalle $[0\,;\,100]$, son signe est celui du polynôme P défini par

$$P(x) = -2x^2 + 192x - 1\,408.$$

2. Étudier le signe de $P(x)$, et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,100]$.

   (on arrondira les valeurs numériques à l'unité).

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ pour $x \in [0\,;\,100]$.

4. À l'aide du graphique, donner une valeur approchée à l'entier près de la solution non nulle de l'équation $f(x) = 0$, puis à l'aide du tableur de votre calculatrice, préciser cette valeur arrondie au millième.

Partie B

Application

Pour des raisons d'approvisionnement limité, la coopérative « Le Val de Seine »ne peut produire et commercialiser plus de 100 tonnes de tomates confites par an.
Le coût total de production (en euros) est donné par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,100]$ par :

$$g(x) = 10x^2 + 40\,000 \ln\left(\frac{x+12}{12}\right),$$

où x désigne le nombre de tonnes produites.
Elle vend toute cette production à 2 160 € la tonne.

1. Déterminer, en fonction de x, le bénéfice de la société sur le poste « tomates confites ».

   Exprimer ce bénéfice en utilisant la fonction f de la partie A.

2. Combien de kilogrammes faut-il produire au minimum pour que ce bénéfice soit positif ?

3. Combien de tonnes faut-il produire pour que ce bénéfice soit maximum ? Que vaut-il alors ?