Brevet de technicien supérieur session 2003 - Informatique de gestion

Exercice 1 **5 points**

On considère l'expression E dépendant des variables booléennes a, b et c :

$$E = \overline{a}.\overline{c} + b.\overline{c} + a.\overline{b} + \overline{a}.\overline{b}.c$$

1. Simplifier l'expression $\overline{E}$ à l'aide de la lecture d'un tableau de Karnaugh (ou d'une table de vérité) et en déduire que :

$$E = \overline{b} + \overline{c}$$

2. Dans un organisme qui aide des personnes au chômage à trouver un emploi, on considère pour ces personnes, trois variables booléennes définies ainsi :

$a = 1$ si la personne est âgée de 45 ans ou plus (sinon $a = 0$) ;
$b = 1$ si la personne est au chômage depuis un an ou plus (sinon $b = 0$) ;
$c = 1$ si la personne a déjà suivi une formation l'année précédente (sinon $c = 0$).

Une formation qualifiante sera mise en place pour les personnes vérifiant au moins un des critères suivants :

— avoir 45 ans ou plus et être au chômage depuis moins de un an ;
— avoir moins de 45 ans et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente ;
— être au chômage depuis un an ou plus et ne pas avoir suivi de formation l'année précédente ;
— avoir moins de 45 ans, être au chômage depuis moins de un an et avoir suivi une formation l'année précédente.

Les personnes qui ne répondent à aucun de ces quatre critères, pourront participer à un stage d'insertion en entreprise.

a. Écrire l'expression booléenne F en fonction des variables a, b et c qui traduit le fait que la personne pourra suivre cette formation qualifiante.

b. En déduire, en utilisant le résultat du 1., les personnes qui ne pourront pas participer à la formation qualifiante et qui participeront donc à un stage d'insertion en entreprise.

Exercice 2 **6 points**

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice $B = A - I$ puis calculer les matrices B^2 et B^3.

2. En déduire la matrice B^n pour tout entier n, $n \geqslant 3$.

3. La formule du binôme, appliquée au développement de $(B+I)^n$ permet d'écrire pour tout entier n, $n \geqslant 3$:

$$A^n = (I+B)^n = I + C_n^1.B + C_n^2.B^2 + C_n^3.B^3 + ... + C_n^k.B^k + + \cdots + C_n^{n-1}.B_{n-1} + B^n$$

où :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a. Vérifier que, pour $n \geqslant 3$: $A^n = I + C_n^1.B + C_n^2.B^2$

b. Montrer, à l'aide des résultats du 1. :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{pour tout entier } n,\ n \geqslant 3$$

4. Application : on considère le graphe orienté G de sommets X, Y et Z, pris dans cet ordre et dont la matrice d'adjacence est la matrice A.

a. Donner une représentation géométrique du graphe G.

b. Déterminer, à l'aide des questions précédentes, le nombre de chemins de longueur 5 du sommet Y au sommet Z.

Exercice 3 **9 points**

Une entreprise a mis au point un circuit électronique formé essentiellement de deux composants distincts C_1 et C_2 montés en parallèle de telle sorte que ce circuit ne peut tomber en panne que lorsque les deux composants C_1 et C_2 sont simultanément en panne.

Partie A

Au bout de 6 000 heures d'utilisation du circuit électronique composé des éléments C_1 et C_2, on considère les évènements suivants :

A : « Le composant C_1 n'a pas eu de panne » ;

B : « Le composant C_2 n'a pas eu de panne ».

On considérera que les pannes des composants C_1 et C_2 sont indépendantes et que les probabilités respectives des évènements A et B sont : $p(A) = 0,22$ et $p(B) = 0,05$.

Pour tous les calculs de probabilités demandés dans cette partie, on donnera les résultats sous leur forme approchée décimale arrondie à 10^{-2} près.

1. On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires des évènements A et B.
Calculer la probabilité de chacun des évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2. a. Calculer la probabilité que le circuit électronique tombe en panne au bout de 6 000 heures.

b. En déduire la probabilité que le circuit électronique fonctionne sans panne au bout de 6 000 heures.

3. Le composant C_1 peut avoir plusieurs pannes dans la période des premières heures d'utilisation. On admet que le nombre de pannes du composant C_1 dans la période des 6 000 premières heures d'utilisation suit la loi de Poisson de paramètre 1,5. On note X la variable aléatoire associée au nombre de pannes du composant C_1 au cours de cette période.

a. Déterminer la probabilité que le composant C_1 ait au plus deux pannes au bout de 6 000 heures.

b. Déterminer la probabilité que le composant C_1 ait au moins une panne au bout de 6 000 heures.

Partie B

Le service qualité de l'entreprise, chargé de tester le temps de fonctionnement de ce circuit électronique, vérifie d'abord le nombre d'heures de fonctionnement de chacun des composants C_1 et C_2. Les résultats obtenus sont les suivants :

Les fonctions f_1 et f_2 correspondant respectivement à la probabilité que les composants C_1 et C_2 fonctionnent sans panne au bout de t milliers d'heures d'utilisation, sont définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{-0,25t} \text{ et } f_2(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}.$$

1. Études des fonctions. Tracés des courbes représentatives

a. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f_1 et f_2.

b. Comment peut-on interpréter ces résultats pour les composants C_1 et C_2 ?

c. Tracer, sur le même graphique, les courbes représentatives G_1 et G_2 des fonctions f_1 et f_2.

On tracera les deux courbes sur l'intervalle $[0~;~6]$ en prenant pour unités :

1 cm pour 500 heures en abscisse ;

10 cm pour la probabilité égale à 1, en ordonnée.

2. a. Déterminer graphiquement pour chaque composant, au bout de combien d'heures, on aura une probabilité qu'il fonctionne sans panne, égale à $0,37$.

On indiquera tous les tracés utiles et on arrondira le résultat à une centaine d'heures près.

b. En déduire, par lecture graphique, lequel des deux composants fonctionnera le plus longtemps sans panne.