∽ Brevet de technicien supérieur ∾ session 2002 - Informatique de gestion

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Exercice 1 **4 points**

Une usine fabrique 3 sortes d'articles : a_1, a_2, a_3, à partir de 3 modules m_1, m_2, m_3.
On donne :

articles

a_1	a_2	a_3	
3	9	5	m_1
4	0	9	m_2
4	8	6	m_3

modules

modules

m_1	m_2	m_3	
5	6	3	Poids unitaires (kg)
180	250	150	Coûts unitaires (en euros)

On lit par exemple :
Pour fabriquer un article a_2, il faut 9 modules m_1 et 8 modules m_3.
Un module m_1 pèse 5 kg et coûte 180 euros.
On note :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & 9 \\ 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 180 & 250 & 150 \end{bmatrix}$$

1. **a.** Calculer le produit matriciel $M \times A$

   b. Interpréter les lignes de ce produit.

2. Une semaine donnée, l'usine doit fournir 8 articles a_1, 12 articles a_2, 13 articles a_3.

   Elle dispose en début de semaine d'un stock de 200 modules de chaque sorte.

   On note F la matrice : $F = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer le produit matriciel $A \times F$. Que représente-t-il ?

   b. La demande [8 articles a_1, 12 articles a_2, 13 articles a_3] peut-elle être satisfaite ?

Exercice 2 **8 points**

Toutes les probabilités demandées dans cette exercice seront données sous leur forme décimale arrondie à 10^{-3} *près.*

La partie C peut être traitée indépendamment des deux autres.
Une entreprise vend 2 types de meubles : M_1, M_2 respectivement 419 euros et 509 euros l'unité.
La demande mensuelle en meubles M_1 est une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(85\ ;\ 15)$.
La demande mensuelle en meubles M_2 est une variable aléatoire Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(52\ ;\ 8)$.
On suppose que X et Y sont indépendantes.

Partie A

Dans cette question, on suppose que le stock est suffisant pour satisfaire la demande. Ainsi, l'entreprise vend mensuellement X meubles M_1 et Y meubles M_2.
Calculer les probabilités (un mois donné) d'avoir les évènements suivants :

V_1 : on vendra au plus 80 meubles M_1.
V_2 : on vendra au plus 70 meubles M_2.

Partie B

Dans cette question, le stock n'est pas obligatoirement suffisant pour satisfaire la demande. L'entreprise dispose en début de mois d'un stock de 80 meubles M_1 et 70 meubles M_2.
Quelles sont les probabilités des évènements suivants :
S_1 : il y aura rupture de stock en meubles M_1.
S_2 : il y aura rupture de stock en meubles M_2.
S : il y aura rupture de stock (en meubles M_1 ou M_2).
(La rupture de stock concerne la fin du mois, et signifie que la demande est supérieure au stock).

Partie C

Un mois donné est dit rentable si le chiffre d'affaires de ce mois dépasse 70 000 euros.

1. Exprimer (en euros) le chiffre d'affaires Z du mois en fonction de X et Y.
2. Calculer l'espérance mathématique de Z.
3. On admet que Z suit la loi normale $\mathcal{N}(62\,803\ ;\ 7\,400)$.
   Quelle est la probabilité qu'un mois donné soit rentable ?
4. On note R le nombre de mois rentables d'un semestre, et on suppose l'indépendance entre les évènements « rentable ou non rentable » des mois successifs.
   Justifier le résultat suivant : R suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6\ ;\ 0,142)$.
5. Quelle est la probabilité que sur les 6 mois d'un semestre, on en ait au moins deux rentables ?

Exercice 3 **8 points**

Un calcul doit être effectué un grand nombre de fois avec des données différentes. Il peut être réalisé à l'aide d'une configuration comprenant plusieurs processeurs travaillant simultanément, et d'un logiciel adéquat pilotant ces processeurs.
Matériellement, on peut installer jusqu'à 256 processeurs.
Le temps d'exécution T d'un calcul (en secondes) est donné en fonction du nombre entier p de processeurs installés par

$$T(p) = \frac{1}{200} + \frac{1+\ln(p)}{p^2},\ \ln \text{ désignant le logarithme népérien.}$$

Le coût (matériel + logiciel) de la configuration est proportionnel au nombre de processeurs installés. On désire choisir p pour que le temps de calcul et le coût soient faibles, et pour cela, on définit l'indice I égal au produit du nombre de processeurs par le temps de calcul :

$$I(p) = p \times T(p) = p\left[\frac{1}{200} + \frac{1+\ln(p)}{p^2}\right].$$

On cherchera donc à avoir une configuration pour laquelle I est minimal.

Partie A

Étude du temps de calcul
Soit t la fonction de la variable x, définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$t(x) = \frac{1}{200} + \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

1. Calculer la dérivée $t'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction t.

2. Calculer la limite de t en $+\infty$. Interpréter ce résultat.

3. Calculer, à 10^{-6} près, $t(72)$, $t(73)$.
Combien faut-il installer de processeurs pour que le temps de calcul soit inférieur à 0,006 secondes ?

Partie B

Étude de l'indice

Soit f la fonction de la variable x, définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 256]$ par :

$$f(x) = x\left[\frac{1}{200} + \frac{1+\ln(x)}{x^2}\right]$$

On définit l'indice moyen de f par $m = \dfrac{1}{255}\displaystyle\int_1^{256} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que la fonction G définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 256]$ par

$$G(x) = \frac{[1+\ln(x)]^2}{2}$$

est une primitive de la fonction g, définie sur le même intervalle, par :

$$g(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

2. En déduire une primitive F de f puis l'indice moyen m à 10^{-2} près.

3. En vous aidant du graphique ci-dessous (courbe représentative de f), puis d'une calculatrice, et en remarquant que $I(p) = f(p)$, déterminer précisément le nombre p de processeurs à installer pour que l'indice soit minimal.