Brevet de technicien supérieur session 2008 - Informatique de gestion

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Durée : 3 heures Coefficient : 2

Exercice 1 **7 points**

La société d'exploitation forestière JURABOIS exploite des coupes et commercialise le bois auprès de scieries situées en France, en Suisse et en Allemagne.

Grâce a une équipe d'agents commerciaux efficaces, la société gagne tous les ans de nouveaux clients, le nombre de ces nouveaux clients étant à peu près le même chaque année. Par ailleurs, un certain pourcentage de clients abandonne chaque année la société pour se tourner vers une société concurrente. Ce pourcentage varie peu d'une année à l'autre.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la société JURABOIS au cours des dix dernières années.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Nombre de clients	1 000	1 030	1 056	1 080	1 100	1 118	1 134	1 149	1 160	1 171

Partie A

1. Compléter, sur la feuille annexe, le tableau reproduit ci dessous, dans lequel on désigne par :
   - n le rang de l'année à partir de 1998 (ainsi $n = 0$ pour 1998) ;
   - u_n, le nombre de clients de la société pour l'année $(1998 + n)$ (ainsi $u_0 = 1\,000$) ;
   - $x_n = u_n$ et $y_n = u_{n+1}$ (ainsi $x_0 = 1\,000$ et $y_0 = 1\,030$).

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
n	0	1							
$x_n = u_n$	1 000	1 030							
$y_n = u_{n+1}$	1 030	1 056							

2. En déterminant avec une calculatrice, une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés, donner deux réels m et p qui modélisent la relation entre $u_{,,1n+1}$ et u_n sous la forme $u_{n+1} = mu_n + p$.
   (On arrondira m à la cinquième décimale, et p à la deuxième décimale.)
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y et l'interpréter.

Partie B

On étudie alors la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 0,88u_n + 150$, avec $u_0 = 1000$, chaque terme u_n étant une bonne approximation du nombre de clients de la société JURABOIS pour l'année $(1998 + n)$.

1. On pose, pour tout entier n : $v_n = u_n - 1250$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
3. Montrer que : $u_n = 1250 - 250 \times 0,88^n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie C

1. En se référant au préambule de l'exercice et en utilisant la formule : $u_{n+1} = 0,88u_n + 150$, donner une estimation du nombre de nouveaux clients gagnés chaque année et une estimation du pourcentage de clients perdus d'une année à l'autre.
2. À partir de quelle année peut-on prévoir que le nombre de clients dépassera 1 200 ?

Exercice 2 **4 points**

La société JURABOIS exploite des coupes constituées exclusivement de feuillus et de résineux. Elle désire simplifier le règlement que ses salariés doivent appliquer pour la coupe du bois. Actuellement le règlement dit qu'un arbre est à abattre dans les quatre cas suivants :

- si c'est un résineux au tronc droit mesurant plus de 20 m de hauteur ;
- si c'est un feuillu de 50 ans ou plus ;
- s'il a moins de 50 ans et mesure plus de 20 m de hauteur ;
- s'il est tordu.

Pour un arbre quelconque, on définit les variables booléennes suivantes par :

$a = 1$ si l'arbre est un résineux ;
$b = 1$ si l'arbre a moins de 50 ans ;
$c = 1$ si l'arbre mesure plus de 20 m de hauteur ;
$d = 1$ si l'arbre est tordu.

1. Écrire la fonction booléenne $f(a,\ b,\ c,\ d)$, qui traduit le règlement actuel d'abattage d'un arbre.

   Grâce à une bonne gestion des forêts que la société exploite, il n'y a maintenant plus d'arbres tordus.
2. Montrer que le nouveau règlement d'abattage se traduit par la fonction :

$$g(a,\ b,\ c) = ac + \overline{a}\overline{b} + bc.$$

3. Donner le tableau de Karnaugh de cette fonction.
4. Simplifier au maximum cette fonction à l'aide du tableau de Karnaugh.
5. Écrire la nouvelle régie d'abattage d'un arbre sous la forme la plus simple possible.

Exercice 3 **9 points**

Partie A

Les probabilités demandées seront arrondies à la quatrième décimale.

1. Les sapins vendus par la société JURAROIS peuvent présenter deux défauts invisibles avant l'abattage, l'un dû à une attaque par un insecte, l'autre dû à la présence d'un champignon. Les deux défauts sont indépendants l'un de l'autre. Pour un sapin choisi au hasard, on note :
   - I l'évènement : « le sapin présente le défaut dû à l'insecte » ;
   - C l'évènement : « le sapin présente le défaut dû au champignon ;
   - D l'évènement : « le sapin présente au moins un défaut ».

   Une étude a montré que la probabilité des évènements I et C sont respectivement $P(I) = 0,0358$ et $P(C) = 0,0249$.

   a. Calculer $P(I \cap C)$.

b. En déduire $P(D)$.

On admet que la probabilité p qu'un tronc de sapin présente au moins un défaut est égale à : $p = 0,06$ et que les différents troncs peuvent présenter ou non au moins un défaut de façon indépendante. Les clients de la société achètent les troncs de sapins par lots de n troncs. On note Y la variable aléatoire qui, à tout lot de n troncs, associe le nombre de troncs présentant au moins un défaut.

2. Pour la « Scierie bisontine », on a : $n = 50$.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ? Justifier la réponse.

b. Calculer $P(Y = 6)$.

c. On admet que l'on peut approcher la loi de Y par une loi de Poisson. Quel est le paramètre de cette loi ?

d. M. Landry, directeur de la Scierie bisontine affirme qu'il a plus de 90 % de chances d'avoir au maximum 5 troncs défectueux dans un lot donné. A-t-il raison ? Pourquoi ?

3. Le « Groupement des Scieries Vaudoises »achète ses troncs de sapins par lot de 450 sapins.

On décide d'approcher la variable Y par une variable Z qui suit la loi normale d'espérance 27 et d'écart-type 5.

a. Justifier le choix de ces paramètres,

b. Utiliser cette approximation pour calculer $P(Y \leqslant 24)$, c'est-à-dire calculer : $P(Z \leqslant 24,5)$.

c. De même, donner une approximation de $P(25 \leqslant Y \leqslant 31)$, en calculant $P(24,5 \leqslant Z \leqslant 31,5)$.

Partie B

Le PDG de JURABOIS entreprend une étude sur le prix du mètre cube de sapin au cours du temps.

Il établit que, si t est le temps écoulé, en mois, depuis le 1er janvier 2005, $p(t)$ s'exprime, en euros, par :

$$p(t) = 41 + 0,2t + 1,6\mathrm{e}^{-0,125t+2,5}.$$

La courbe représentative de la fonction p est donnée dans la feuille annexe.

1. Compléter sur la feuille annexe, le tableau reproduit ci-dessous en arrondissant à la deuxième décimale.

dates	01.01.2005	01.07.2005	01.01.2006	01.07.2006	01.01.2007		01.01.2009	01.01.2011
t	0	6	12	18	24	36		
$p(t)$	60,49		47,75					

2. Calculer la dérivée $p'(t)$, vérifier que $p'(t)$ est du signe de $1 - \mathrm{e}^{-0,125t+2,5}$, puis dresser le tableau des variations de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;\,72]$.

3. Déterminer par lecture graphique la date (année-mois) à partir de laquelle le prix du mètre cube de sapin dépassera à nouveau 50 €.

(On fera apparaître les traits de constructions sur la feuille annexe, à rendre avec la copie.)

4. Déterminer une primitive de la fonction p sur l'intervalle $[0\,;\,72]$.
En déduire une valeur, arrondie au centime d'euro près, du prix moyen du mètre cube de sapin pendant les années 2005-2007, en calculant l'intégrale :

$$I = \frac{1}{36}\int_0^{36} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie

EXERCICE N° 1 Partie A 1

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
n	0	1							
$x_n = u_n$	1 000	1 030							
$y_n = u_{n+1}$	1 030	1 056							

EXERCICE N° 3 Partie B 1

Dates	01.01.2005	01.07.2005	01.012006	01.07.2006	01.01.2007		01.01.2009	01.01.2011
t	0	6	12	18	24	36		
$p(t)$	60,49		47,75					

Partie B 3

La courbe suivante est la représentation graphique de la fonction $t \longmapsto p(t)$ sur l'intervalle $[0\,;72]$.