∽ Brevet de technicien supérieur Métropole ∾ session 2010 - Informatique de gestion

ÉPREUVE OBLIGATOIRE

Durée : 3 heures | Coefficient : 2

Exercice 1 **5 points**

Dans le lycée DUJARDIN, les classes de BTS informatique de gestion disposent de 4 salles spécialisées A, B, C, D. Trois portes, permettant le passage dans les deux sens, relient les salles A et B, les salles A et C et les salles B et D.

1. Dessiner une représentation du graphe G orienté associé au passage d'une salle à l'autre.
2. Justifier que la matrice d'adjacence M du graphe G est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Calculer la matrice M^2 et justifier qu'il existe 6 circuits de longueur 2.
4. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - **a.** Déterminer le nombre de chemins de longueur 3.
   - **b.** Donner la liste des chemins de longueur 3 ayant pour origine A et pour extrémité B.
   - **c.** Le graphe admet-il des circuits de longueur 3 ? Justifier la réponse donnée.
5. Matrices et opérations booléennes.
   - **a.** Écrire les deux matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.
   - **b.** Calculer la somme $M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]}$ où $\oplus$ désigne l'addition booléenne des matrices et en déduire la matrice $\hat{M}$ de la fermeture transitive du graphe G.

Exercice 2 **7 points**

Les deux parties sont indépendantes. Tous les résultats des calculs seront arrondis au millième.

Première partie

Au cours de l'année scolaire 2008–2009, une enquête a été réalisée auprès des 3 000 élèves du lycée DUJARDIN, afin de savoir s'ils utilisent régulièrement l'outil informatique pour leurs études. On a obtenu les résultats suivants :

- 25 % des élèves du lycée sont inscrits en « post-bac » et parmi ces élèves, 50 % d'entre eux déclarent utiliser quotidiennement l'ordinateur.
- 10 % des élèves inscrits en « pré-bac » dans ce lycée déclarent utiliser quotidiennement un ordinateur.

On interroge au hasard un élève du lycée et on définit les évènements suivants :

- A : « l'élève est inscrit en « post bac » ».
- I : « l'élève utilise quotidiennement un ordinateur ».

1. Donner les probabilités $p(A)$, $p\left(\overline{A}\right)$, $p_A(I)$, $p_{\overline{A}}(I)$.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants :

a. l'élève est un étudiant post-bac et utilise quotidiennement un ordinateur pour ses études ;

b. l'élève utilise quotidiennement un ordinateur pour ses études ;

c. l'élève est un étudiant post-bac ou utilise quotidiennement un ordinateur pour ses études ;

d. l'élève est un étudiant post-bac sachant qu'il utilise quotidiennement un ordinateur pour ses études.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré ou d'un tableau à double entrée

Deuxième partie

L'enquête a montré que 50 % des élèves inscrits « en post-bac » au lycée DUJARDIN utilisent quotidiennement un ordinateur pour leurs études. On interroge successivement et de manière indépendante, 64 élèves inscrits en « post-bac ».
On note X, la variable aléatoire qui comptabilise, parmi les 64 interrogés, le nombre d'élèves, qui utilisent quotidiennement un ordinateur.

1. Expliquer pourquoi la loi de probabilité de la variable aléatoire X est une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. On admet que la variable aléatoire X peut être approchée par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de paramètres m et σ.

a. Démontrer que $m = 32$ et que $\sigma = 4$.

b. Calculer la probabilité $p(Y \leqslant 36,5)$ de l'évènement « au plus 36 étudiants utilisent quotidiennement un ordinateur ».

Troisième partie

L'enquête a montré en outre que 10 % des élèves du lycée inscrits en « pré-bac » utilisent quotidiennement un ordinateur. On interroge successivement 100 élèves du lycée inscrits en « pré-bac ». On admet que l'effectif du lycée est suffisamment important pour que les interrogations soient considérées comme indépendantes.

On note X' la variable aléatoire qui comptabilise, parmi les 100 interrogés, le nombre d'élèves qui utilisent quotidiennement un ordinateur. La loi de probabilité de la variable aléatoire X' est donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,1$.

1. Donner la formule qui permet d'obtenir $P(X' = 10)$ et donner une valeur approchée arrondie au millième de cette probabilité.

2. On admet que la variable aléatoire X' peut être approchée par une variable aléatoire Y' qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Déterminer la valeur de λ.

b. En utilisant la table, calculer la probabilité de l'évènement : « au moins 2 élèves inscrits en « pré-bac » utilisent quotidiennement un ordinateur ».

Exercice 3 **8 points**

Les deux parties sont indépendantes.
Sauf indication contraire, on donnera les résultats arrondis au millième.

Première partie

Le lycée DUJARDIN a fait un gros effort d'investissement pour l'informatique pédagogique. Le tableau suivant donne le nombre d'ordinateurs disponibles lors des dernières rentrées scolaires :

Années	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
x_i : rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i : nombre d'ordinateurs	140	160	180	220	260	320	380	450

1. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de y en x sous la forme $y = ax + b$.

   a sera arrondi au dixième et b à l'unité. Aucun calcul intermédiaire n'est exigé.

2. Avec ce modèle linéaire, donner une estimation du nombre d'ordinateurs disponibles à la rentrée 2010.

3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i : rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln y_i$	4,942							

4. Donner le coefficient de corrélation de z en x. Que peut-on en conclure ?

5. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x.

   Aucun calcul intermédiaire n'est exigé.

6. En déduire une expression du nombre d'ordinateurs disponibles sous la forme $y = A\mathrm{e}^{Bx}$.

   A sera arrondi à l'unité et B au millième.

7. Avec ce modèle exponentiel donner une estimation du nombre d'ordinateurs disponibles à la rentrée 2010.

Deuxième partie

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 113\mathrm{e}^{0,171x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 unités sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Détermination des variations de la fonction f

   a. Calculer la dérivée f' et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0.

4. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$

   a. Recopier et compléter le tableau suivant. *On donnera les valeurs arrondies à l'unité.*

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente $\mathscr{T}$ dans le repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

   c. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à l'unité.