Brevet de technicien supérieur session 2010 Géomètre topographe

Exercice 1 : étude d'une courbe plane **9 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

On considère la courbe C définie par : $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t-\sqrt{2}\sin(t) \\ y(t) & = & \cos(t)\end{array}\right.$, t décrivant $\mathbb{R}$.

On note M_t le point de coordonnées $\left(x(t)\ ;\ y(t)\right)$ de C.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques aspects de C et d'en tracer l'allure.

A) Détermination de l'intervalle d'étude

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{M_tM_{t+2\pi}}$ est constant.
Comment déduit-on le point $M_{t+2\pi}$ du point M_t ? Qu'en déduit-on pour la courbe C ?

2. Comparer les coordonnées de M_{-t} et celles de M_t.
Qu'en déduit-on pour les points M_{-t} et M_t, ainsi que pour la courbe C ?

3. Montrer que l'intervalle d'étude peut être restreint à $J = [0\ ;\ \pi]$.

4. On nomme C_J la courbe décrite par M_t lorsque t décrit l'intervalle J.
Comment peut-on déduire C à partir de C_J ?

B) Étude de C_J avec $J = [0\ ;\ \pi]$ et applications.

1. r

a. Calculer $x'(t)$ et étudier le signe de $x'(t)$ sur J.

b. Calculer $y'(t)$ et étudier le signe de $y'(t)$ sur J.

c. Étudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle J.
On présentera les résultats de cette étude, en indiquant les valeurs exactes, dans le premier tableau figurant en **annexe à rendre avec la copie**.
On y portera aussi les valeurs de $x'(t)$ et $y'(t)$ aux bornes de l'intervalle.

2. a. Préciser les points de C_J ayant des tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

b. Déterminer le point d'intersection de C_J avec l'axe des abscisses.

3. a. Compléter le tableau de valeurs situé dans l'annexe.

b. On se propose de tracer la partie de la courbe C correspondant à la variation de t dans $[-\pi\ ;\ \pi]$.
Faire d'abord apparaitre C_J sur la feuille de papier millimétré à rendre avec la copie dans le repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 centimètres.
On fera apparaitre les tangentes aux points de paramètres 0, $\dfrac{\pi}{4}$ et π.

c. Sur la même figure, esquisser la partie de C correspondant à la variation de t dans $[-\pi\ ;\ 0]$.

Exercice 2 : étude d'une route orthodromique **11 points**

Préambule et notations

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, la Terre est assimilée à une sphère Σ de centre O et de rayon 1.

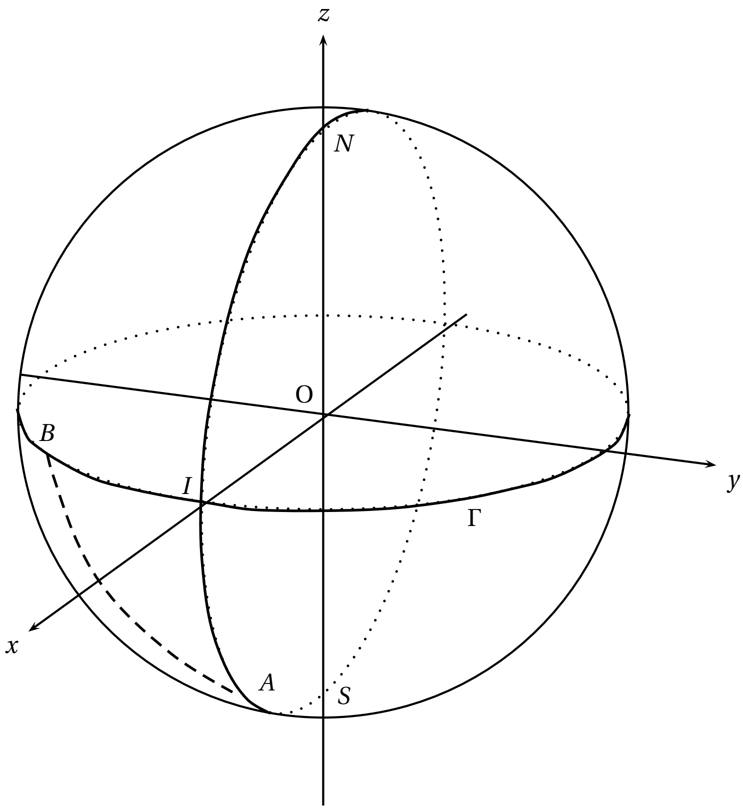
L'équateur Γ est le cercle intersection de la sphère Σ et du plan Π d'équation $z = 0$.

Tout point de Σ est alors repéré par le couple $(\theta\ ;\ \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians).

En navigation (terrestre ou aérienne) une route orthodromique désigne une trajectoire décrivant une partie d'un grand cercle du globe terrestre.

Soient les points $N\left(\theta = 0\ ;\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}\right)$, $S\left(\theta = 0\ ;\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $I(\theta = 0\ ;\ )$ et $A\left(\theta = 0\ ;\ \varphi = -\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Un navire partant de A se dirige vers le **nord-ouest** en suivant une route orthodromique qui coupe l'équateur au point B (voir la figure ci-dessous).
On admet que la longitude de B est négative et que l'angle $\widehat{A}$ du triangle sphérique AIB mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radians.



Rappel

Pour un triangle sphérique ABC, avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{A}\right) &= -\cos\left(\widehat{B}\right)\cos\left(\widehat{C}\right) + \sin\left(\widehat{B}\right)\sin\left(\widehat{C}\right)\cos(a)\\ \cos(a) &= \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos\left(\widehat{A}\right)\end{aligned}$$

A) Résolution du triangle sphérique AIB et position du point B

1. On rappelle que l'angle $\widehat{A}$ vaut $\dfrac{\pi}{4}$. Justifier que $\widehat{I} = \dfrac{\pi}{2}$ et donner le côté $b = \widehat{AI}$.
2. Calculer une mesure en radians de l'angle $\widehat{B}$.
3. Montrer que $\cos(a) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
4. Montrer que les coordonnées cartésiennes de B sont : $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\ ;\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ 0\right)$.

B) Projection stéréographique de pôle sud

On note $\mathcal{T}$ l'inversion de pôle S et de puissance 2.
On rappelle que pour tout point M différent de S on a $M' = \mathcal{T}(M)$ si et seulement si $\overrightarrow{SM'} = \dfrac{2}{SM^2}\overrightarrow{SM}$.

1. **Préliminaires**
   a. Calculer les coordonnées cartésiennes de A.
   b. Déterminer l'image N' du point N.
   c. Quelle est l'image de la sphère Σ privée du point S par l'inversion $\mathcal{T}$?
   d. Montrer que tout point du cercle équatorial Γ est invariant par $\mathcal{T}$.
2. Justifier le fait que A' a pour coordonnées cartésiennes $(1+\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ 0)$.
3. Soit Γ_1 le grand cercle passant par I et A. Quelle est l'image Γ_1' de Γ_1 par $\mathcal{T}$?
4. Soit Γ_2 le grand cercle passant par A et B et Γ_2' son image par $\mathcal{T}$. Justifier que Γ_2' est un cercle.
5. Représenter, sur la copie, dans le plan repéré par $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ les cercles Γ et Γ_2' ; ainsi que les inverses par $\mathcal{T}$ des côtés du triangle sphérique AIB.
   On pourra éventuellement utiliser le point B_1 symétrique de B par rapport au point O.

– ANNEXE à rendre avec la copie –

Exercice 1 :

Tableau de variations du B- 1. c.

t	0 π
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
$y'(t)$	

Tableau de valeurs du B-3. a. (valeurs arrondies à 10^{-2} près).

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$x(t)$					
$y(t)$					