∽ Brevet de technicien supérieur ∾ session 2002 - Géomètre topographe

Exercice 1 **11 points**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 5 cm). On considère les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = 1$ et $x = -1$.
Une droite variable (D), passant par O et de coefficient directeur t, ($t \in \mathbb{R}$), coupe (Δ) en P.
La parallèle à $\left(O ; \vec{\imath}\right)$ passant par P coupe (Δ') en P$'$.

1. Faire une figure qui sera complétée dans les questions suivantes.
2. Soit M(x ; y) le projeté orthogonal de P$'$ sur la droite (D).
   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{P'M}$.
   b. En déduire que les coordonnées de M sont données par : $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y = t\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.
3. On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe définie paramétriquement par : $x(t) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ et $y(t) = t\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.
   a. En étudiant la parité des fonctions x et y, donner un intervalle d'étude suffisant pour l'étude des variations de x et y et pour le tracé de ($\mathscr{C}$).
   b. Vérifier que :
   $$x'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2} \quad \text{et} \quad y'(t) = \frac{\left(t^2+2-\sqrt{5}\right)\left(t^2+2+\sqrt{5}\right)}{\left(t^2+1\right)^2}.$$
   c. Étudier les variations des fonctions x et y.
   d. Déterminer les points d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec la droite $\left(O ; \vec{\imath}\right)$ et les équations des tangentes à ($\mathscr{C}$) en ces points.
4. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) sur la figure du 1.

Exercice 2 **9 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal de sens direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Sur la sphère (Σ) de centre O et de rayon 1, on considère les points :

N de coordonnées cartésiennes (0, 0, 1)	S de coordonnées cartésiennes (0, 0, −1)
A $\begin{cases} \text{longitude} & 90° \text{ Est} \\ \text{latitude} & 30° \text{ Sud} \end{cases}$	B $\begin{cases} \text{longitude} & 0° \\ \text{latitude} & 0° \end{cases}$

Rappels : dans un triangle sphérique (ABC), avec les notations usuelles, on a les relations :

$$\cos a = \cos b \cos c \sin b \sin c \cos A \quad \text{et} \quad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

1. **a.** Faire une figure : placer les points N, S, A et B.

b. Justifier que les coordonnées cartésiennes des points A et B sont respectivement $\left(0\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ et (1 ; 0 ; 0).

2. Déterminer les éléments du triangle sphérique (SAS).

3. Soit T l'inversion de pôle N et de puissance 4.

a. Quelle est l'image de la sphère (Σ) par l'inversion T ?

b. Soient A′ et B′ les images respectives de A et B par l'inversion T.

En utilisant la relation $\overrightarrow{\text{NM}'} = \dfrac{4}{\text{NM}^2}\overrightarrow{\text{NM}}$, où M′ désigne l'image par T d'un point M quelconque, calculer les coordonnées cartésiennes de A′ et B′.
Placer les points A′ et B′ sur la figure.

4. **a.** En déduire la distance A′S′,

b. Calculer la différence d entre la distance A′B′ et la longueur du petit arc de grand cercle d'extrémités A et B.

5. La Terre est assimilée à la sphère (Σ), dont on exprime maintenant le rayon en kilomètres, en prenant R = 6 380 km.

Exprimer la différence d en kilomètres, arrondie au km près.