Brevet de technicien supérieur session 2001 - Géomètre topographe

Exercice 1 **10 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère la parabole $\mathscr{P}$, représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

On oriente $\mathscr{P}$ dans le sens des abscisses croissantes. En chaque point M de $\mathscr{P}$ on désigne par $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent et par $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal.
On rappelle que la base $\left(\vec{T},\ \vec{N}\right)$ est directe et que le rayon de courbure algébrique R, au point de $\mathscr{P}$ d'abscisse x, est donné par la formule

$$R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''},\ \text{avec } y' = f'(x) \text{ et } y" = f''(x).$$

1. Tracer $\mathscr{P}$, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[-4~;~4]$, en prenant 2 cm pour unité graphique.

2. Étudier le sens de variation de la fonction R.
En déduire le minimum du rayon de courbure et tracer le cercle de courbure correspondant sur le graphique précédent.

3. On se place désormais au point A, d'abscisse 1, de la parabole $\mathscr{P}$.

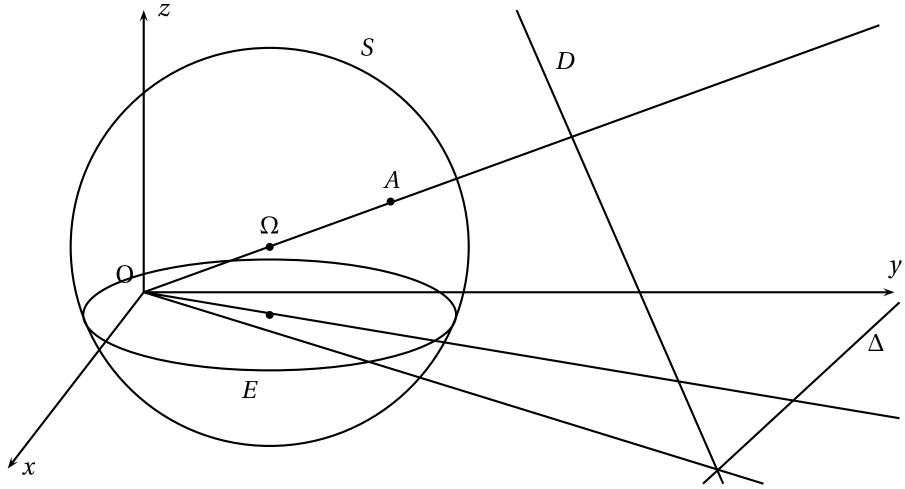
- **a.** Déterminer une équation de la tangente et une équation de la normale à $\mathscr{P}$ en ce point.
- **b.** Montrer que le vecteur $\vec{U}$, de coordonnées $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}~;~\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, est unitaire et qu'il est directeur de la normale à $\mathscr{P}$ au point A,
- **c.** On admet que $\vec{N}$ est égal à $\vec{U}$.
  Montrer que les coordonnées du centre de courbure Ω sont $\left(-1~;~\dfrac{5}{2}\right)$.
- **d.** Tracer la tangente et la normale à $\mathscr{P}$ au point A.
  Représenter les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ au point A.
- **e.** Tracer le cercle de courbure $\mathscr{C}$ au point A et montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est $x^2+y^2+2x-5y-\dfrac{3}{4}=0$.
- **a.** Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ sont solutions de l'équation

$$x^4-6x^2+8x-3=0.$$

- **b.** Vérifier que $x^4-6x^2+8x-3=(x+3)(x-1)^3$.
  En déduire que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$ n'ont qu'un seul autre point d'intersection que A.

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Le schéma donné ci-dessous met en perspective quelques éléments de l'exercice, sans prétendre en donner une représentation exacte).



S est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z = 0$.
T est la transformation qui, à chaque point M de l'espace, différent de O, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{\mathrm{O}M'} = \dfrac{54}{\mathrm{O}M^2}\overrightarrow{\mathrm{O}M}$.

1. Déterminer le centre Ω et le rayon r de S.

2. a. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M'}$, montrer que T est une inversion, dont on précisera le pôle et le rapport.

b. Le point A est le symétrique de O par rapport à Ω.
Calculer les coordonnées de $\mathrm{A}' = T(\mathrm{A})$.
Déterminer l'inverse, P, de la sphère S privée du point O, par T.
Montrer qu'une équation de P est $2x + 2y + z - 27 = 0$.

3. Soit D la droite dont une représentation paramétrique est :

$$x = 2 - t\ ; \quad y = 14 + 2t\ ; \quad z = 5 - 2t \quad ; \ t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que la droite D est incluse dans P et que le point A' appartient à D.

b. Déterminer l'inverse C de la droite D, par T.

c. Pour tout point M de D, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, on note $(x'\ ;\ y'\ ;\ z')$ les coordonnées de son inverse M' par T. Montrer qu'une représentation paramétrique de C est :

$$x' = \frac{-6t + 12}{t^2 + 8t + 25}\ ; \quad y' = \frac{12t + 84}{t^2 + 8t + 25}\ ; \quad z' = \frac{-12t - 30}{t^2 + 8t + 25}\ ;\ t \in \mathbb{R}.$$

d. Déterminer les coordonnées du point I d'intersection de C avec le plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

4. Le plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ coupe le plan P suivant la droite Δ et coupe la sphère S suivant le cercle E.

a. Déterminer l'inverse de Δ par T.

b. Montrer que le vecteur de coordonnées $(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ est un vecteur directeur de Δ.

c. En déduire l'angle géométrique θ, appartenant à $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, des deux courbes C et E.