Brevet de technicien supérieur
Géomètre topographe session 2006

Exercice 1 **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$d'unité 1 cm.
Soit (C) la courbe d'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{6}{2+\cos\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que, pour tracer la courbe (C), il suffit de la tracer sur $[0\,;\,\pi]$.
2. Soit M un point de coordonnées polaires $(r\,;\theta)$. Donner, en fonction de r et de θ, ses coordonnées cartésiennes
3. Montrer que si M, de coordonnées cartésiennes $(x,\ y)$, appartient à (C), alors : $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.
On admettra la réciproque.
4. Reconnaître la nature de la conique d'équation $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$. Préciser l'axe focal, les foyers et les sommets de cette conique.
5. Tracer soigneusement la courbe (C) pour $\theta \in [0\,;\,\pi]$. Expliquer comment obtenir le tracé de (C) pour $\theta \in \mathbb{R}$. Tracer (C).
6. Soit A le point de (C) défini par $\theta = 0$. Montrer que le rayon de courbure au point A vaut 3. On rappelle que $R = \dfrac{\left(r^2+r'^2\right)^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}$.
7. Déterminer une équation cartésienne du cercle de courbure au point A.

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Sur la sphère (S) de centre O et de rayon 1, on considère les points A, B, C de coordonnées :

$A \begin{cases}\text{longitude } 0\,°\\ \text{latitude } 45\,°\text{Nord}\end{cases}$ $B \begin{cases}\text{longitude } 90\,°\text{Est}\\ \text{latitude } 0\,°\end{cases}$ $C \begin{cases}\text{longitude } 90\,°\text{Est}\\ \text{latitude } 60\,°\text{Nord}\end{cases}$

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B et C.
3. Calculer les longueurs des côtés du triangle sphérique (ABC).
4. Soit I l'inversion de pôle B et de puissance 2.
   a. Déterminer l'image de la sphère, privée du point B, par l'inversion I.
   b. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A' et C', images respectives des points A et C par l'inversion I.
5. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (OAB) est $z = x$.
6. On désigne par (Γ) la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\\ y(t) = \sin t\\ z(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t \end{cases}$$

a. Montrer que (Γ) est contenue dans le plan (OAB).

b. Montrer que (Γ) est contenue dans la sphère (S).

c. En déduire que, si M est un point appartenant à (Γ), alors il appartient à un cercle $(\mathscr{C})$ que l'on caractérisera.

d. On admet que (Γ) et $(\mathscr{C})$ sont confondus. Déterminer l'image de la courbe (Γ) privée du point B par l'inversion I.