Brevet de technicien supérieur Géomètre topographe session 2004

Exercice 1 **10 points**

Le but de cet exercice est l'étude d'une courbe plane, appelée lemniscate, que l'on peut rencontrer lors de l'élaboration de certains raccordements routiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 5 cm). On note $\mathscr{C}$ la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$r = f(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)} \text{ pour } \theta \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$$

1. Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   a. À quel intervalle $\theta + \pi$ appartient-il ?
   b. Calculer $f(\theta + \pi)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   a. À quel intervalle $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ appartient-il ?
   b. Calculer $f(\theta + \pi)$ en fonction de $f(\theta)$; en déduire une propriété de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.
3. Soit $\mathscr{C}_1$ l'arc de courbe obtenu pour $\theta \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Comment obtient-on $\mathscr{C}$ à partir de $\mathscr{C}_1$?
4. Montrer que pour tout θ appartenant à $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $r' = f'(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$.
5. Étudier le signe de $f'(\theta)$ sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$. En déduire les variations de f pour $\theta \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$, puis dresser le tableau de variations de f sur ce dernier intervalle.
6. On pose, pour tout $\theta \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Montrer que :
$$x' = \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}} \text{ et } y' = \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}.$$
7. Déterminer un vecteur directeur de chacune des deux tangentes suivantes à la courbe $\mathscr{C}$, l'une au point A de paramètre $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ et l'autre au point B de paramètre $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
8. Calculer $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{y'}{x'}$. On admet que cette limite est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point O. Caractériser la tangente à $\mathscr{C}$ au point O.
9. Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que les tangentes aux points O, A, B.
10. On admet que le rayon de courbure au point B vaut $\dfrac{1}{3}$. Déterminer un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale au point B. Sur la même figure, construire le cercle de courbure en B.

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Les axes de coordonnées sont les axes $(\mathrm{O}x)$, $(\mathrm{O}y)$ et $(\mathrm{O}z)$. Les plans de coordonnées sont les plans $(\mathrm{O}xy)$, $(\mathrm{O}xz)$ et $(\mathrm{O}yz)$. La notation $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ désigne le point M de coordonnées $x,\ y$ et z.

La figure sera construite et complétée sur l'annexe au fur et à mesure de l'avancement des questions.

Soit Δ la droite incluse dans le plan $(\mathrm{O}yz)$, d'équations $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ 12y-5z & = & 0\end{array}\right.$

Soit Σ la sphère de centre $\Omega(0\ ;\ 3\ ;\ 2)$, tangente en $\mathrm{T}(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$ au plan $(\mathrm{O}xy)$.

1. **a.** Montrer que la sphère Σ a pour équation $x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0$.

   b. Montrer que la droite Δ et la sphère Σ ont pour unique point commun $\mathrm{A}\left(0\ ;\ \dfrac{15}{13}\ ;\ \dfrac{36}{13}\right)$.

   En déduire la position de la droite Δ par rapport à la sphère Σ.

2. Soit P le plan perpendiculaire au point A à la droite Δ.

   a. Montrer que P a pour équation $5y+12z-39=0$.

   b. On note Δ_1, Δ_2, Δ_3 les droites intersections respectives de P avec les plans $(\mathrm{O}yz)$, $(\mathrm{O}xz)$ et $(\mathrm{O}xy)$. Déduire de la question a. un système d'équations cartésiennes de chacune des droites $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$.

   c. Compléter la figure donnée en annexe. En particulier, on reconnaîtra et on nommera les droites $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$.

3. Soit B le point de la sphère Σ, diamétralement opposé à T.

   On note T' le point de coordonnées $(3\ ;0\ ;0)$.

   a. Déterminer les coordonnées de B et placer ce point sur la figure en annexe.

   b. Écrire une équation du plan P' déterminé par les droites (TB) et (TT').

   c. Montrer que les plans P et P' sont sécants suivant une droite D d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 12t \\ y & = & -12t+3 \\ z & = & 5t+2\end{array}\right.$

   d. Déterminer les coordonnées du point I, intersection de D avec le plan $(\mathrm{O}xz)$.

4. Soit Γ_1 le grand cercle intersection du plan P et de la sphère Σ. Soit Γ_2 le grand cercle intersection du plan P' et de la sphère Σ. Les deux grands cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points. On note C le point d'abscisse positive. On obtient ainsi un triangle sphérique ABC tracé sur la sphère Σ.

   a. Compléter la figure donnée en annexe ; reconnaître et nommer Γ_1 et Γ_2.

   Avec les notations habituelles, on rappelle les « formules fondamentales »

   $$\left\{\begin{array}{lcl} \cos a & = & \cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\widehat{A} \\ \cos\widehat{A} & = & -\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}+\sin\widehat{B}\sin\widehat{C}\cos a\end{array}\right.$$

   b. Montrer que le triangle sphérique ABC est rectangle en A. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\cdot\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$.

   En déduire une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{A}\Omega\mathrm{B}}$.

   c. Nommer deux plans de la figure déterminant l'angle $\widehat{\mathrm{B}}$ du triangle sphérique ABC.

   d. En déduire que sa mesure est 45 °. Calculer des valeurs approchées de $\widehat{\mathrm{B}},\ b,\ a$.

ANNEXE à rendre avec la copie

Figure de l'exercice 2