Brevet de technicien supérieur session 2012 Géomètre topographe

Exercice 1 : Étude d'une courbe paramétrée **10 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On considère la courbe Γ dont chaque point M_t a pour coordonnées :

$$t \in \mathbb{R} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2(1+\cos t) \\ y(t) & = & (1+\cos t)\sin t \end{array}\right.$$

1. **Réduction de l'intervalle d'étude**

   a. Déterminer la périodicité des fonctions x et y.

   b. Étudier la parité des fonctions x et y. Quelle propriété de la courbe Γ peut-on en déduire ?

   c. Montrer que l'intervalle d'étude peut être réduit à l'intervalle $J = [0 ; \pi]$.

2. **Étude de la courbe Γ**

   a. Montrer que :

   $$t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = -2\sin t \quad \text{et} \quad y'(t) = (2\cos t - 1)(1+\cos t)$$

   b. Étudier le signe de $x'Ct)$ et celui de $yx'(t)$ sur l'intervalle J, puis dresser le tableau de variations complet des fonctions x et y sur l'intervalle J.

3. **Étude de la courbure**

   On admet que : $\left\{\begin{array}{l} x''(t) = -2\cos t \\ y''(t) = -4\sin t\cos t - \sin t \end{array}\right.$

   a. Déterminer le rayon de courbure R de la courbe Γ au point A de paramètre t égal à $\dfrac{\pi}{3}$.

   Rappel : $R = \dfrac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$.

   b. Montrer que le vecteur directeur unitaire de la tangente à Γ en A est le vecteur $-\vec{\imath}$.

   c. Donner le vecteur unitaire $\vec{n}$ tel que le repère $\left(\text{A} ; -\vec{\imath}, \vec{n}\right)$ soit orthonormal direct.

   d. En déduire les coordonnées du centre de courbure G de la courbe Γ au point A.

4. **Tracé de la courbe Γ**

   a. Compléter le tableau de valeurs de l'annexe 1, à rendre. On donnera les valeurs arrondies à 0,01 près.

   b. On admettra que la tangente à la courbe Γ au point de paramètre t égal à π est horizontale. Tracer la courbe Γ dans le repère de l'annexe 2, à rendre.

   c. Tracer le cercle de courbure au point A.

Exercice 2 : Géométrie sphérique **10 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Soit la sphère Σ de centre O, de rayon $\sqrt{12}$.
Soient les points $\text{A}(0 ; -\sqrt{12} ; 0)$, $\text{B}(3 ; -\sqrt{3} ; 0)$, $\text{C}(3 ; \sqrt{3} ; 0)$ et $\text{D}(0 ; \sqrt{12} ; 0)$ de la sphère Σ.

On rappelle que l'image M' d'un point M par l'inversion de pôle Ω et de puissance k est définie par

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{k}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}.$$

A. Propriétés de l'inversion

On considère l'inversion I de pôle $\Omega(2 ; 0 ; 0)$ et de puissance -8.

1. Quelle est la nature de l'inverse de la sphère Σ par l'inversion I ? Justifier la réponse.

2. a. Montrer que les points A et C sont inverses l'un de l'autre par l'inversion I et que les points B et D sont eux aussi inverses l'un de l'autre par l'inversion I.

b. Placer sur la figure donnée en annexe 3, à rendre, les points Ω, A et D.

c. En admettant que la sphère Σ est globalement invariante par l'inversion I, construire sur l'annexe 3 les points B et C.

3. Soit le point $\text{E}\left(\frac{3}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; 3\right)$.

a. Vérifier que le point E est un point de la sphère Σ.

b. Montrer que l'image du point E par l'inversion I est le point $\text{F}\left(\frac{12}{5} ; \frac{\sqrt{12}}{5} ; -\frac{12}{5}\right)$.

4. Quelle est l'image du cercle circonscrit au triangle plan ABE par l'inversion I ? Justifier la réponse.

B. Étude du triangle sphérique ABE

1. a. Déterminer les coordonnées sphériques sous la forme $(R ; \theta ; \varphi)$ des points A et B

(R désignant la distance du point à l'origine, θ la longitude et φ la latitude en radians) .

b. On admet que les coordonnées sphériques de E sont : $\left(\sqrt{12} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}\right)$.

En déduire l'angle $\widehat{\text{B}}$ et les longueurs des côtés $\overset{\frown}{\text{BE}}$ et $\overset{\frown}{\text{AB}}$ du triangle sphérique ABE.

2. Déterminer la valeur exacte du côté $\overset{\frown}{\text{AE}}$ puis en donner la valeur arrondie à 10^{-3} près. On détaillera les calculs.

Rappel : Pour un triangle ABC sur la sphère de centre O et de rayon 1, avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique :

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos \text{A}$$

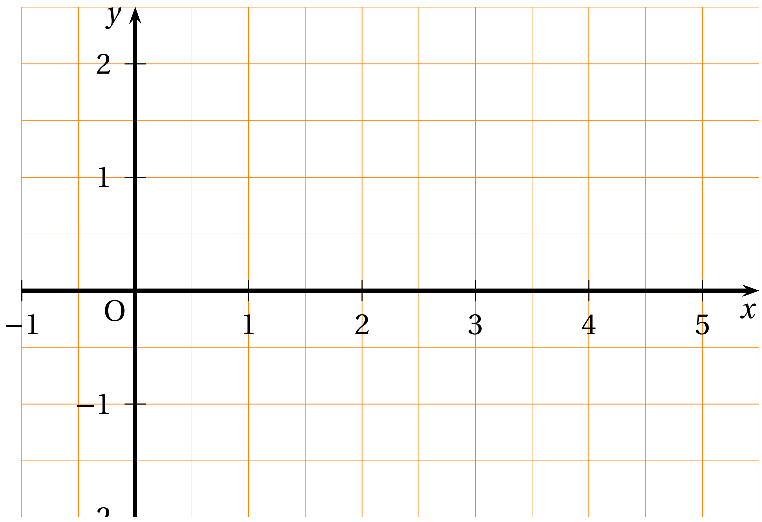
ANNEXE 1 : à rendre avec la copie

EXERCICE 1 : 4. a.

Point	M_0	A	M_π
t	0	$\dfrac{\pi}{3}$	π
$x(t)$			
$y(t)$			

ANNEXE 2 : à rendre avec la copie

EXERCICE 1 : 4. b.



ANNEXE 3 : à rendre avec la copie

EXERCICE 2 : A 2. b.
EXERCICE 2 : A 2. c.