Brevet de technicien supérieur session 2011
Géomètre topographe

Exercice 1 : géométrie sphérique **9 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
(Σ) est la sphère de centre O, de rayon 1.
Rappels : avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique :

- tout point de (Σ) est repéré par le couple $(\theta\ ;\ \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians) ;
- les éléments caractéristiques du triangle sphérique ABC sont notés a, b, c pour les angles au centre, et A, B, C pour les angles aux sommets et seront exprimés en radians ;
- pour un triangle sphérique ABC :
  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \widehat{\text{A}}$ et
  $\dfrac{\sin a}{\sin \widehat{\text{A}}} = \dfrac{\sin b}{\sin \widehat{\text{B}}} = \dfrac{\sin c}{\sin \widehat{\text{C}}}$.

On considère en coordonnées sphériques les points de (Σ) suivants :

$$\text{N}\left(0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{S}\left(0\ ;\ -\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{A}(0\ ;\ 0) \quad \text{B}\left(0\ ;\ \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{C}\left(\frac{5\pi}{12}\ ;\ 0\right)$$

1. Compléter la figure donnée en annexe 1, en plaçant les points N, S, A, B et C, ainsi que le triangle sphérique ABC.

2. **a.** En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$ justifier les résultats suivants :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

b. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées cartésiennes des points A, B, C.

3. **a.** Donner les valeurs exactes de b, c et $\widehat{\text{A}}$.

b. Déterminer les valeurs arrondies à 10^{-3} près de a, $\widehat{\text{B}}$ et $\widehat{\text{C}}$.

c. Déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de l'aire du triangle sphérique ABC.

4. On note I l'inversion de pôle N et de puissance 2.
Pour tout point M de l'espace, on notera M' son image par l'inversion I.

a. Déterminer l'image par l'inversion I de la sphère (Σ) privée du point N.

b. Quelles sont les images des points A et C par l'inversion I ?

c. Calculer les coordonnées exactes de B$'$, image du point B par l'inversion I.

d. Placer le point B$'$ sur la figure en laissant les traits de construction.

Exercice 2 : étude d'une courbe paramétrée **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ direct.
On considère la courbe (Γ) dont chaque point M_t a pour coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) & = & \dfrac{\text{e}^t}{1+t^2} \end{array}\right., \ t \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

1. Étude des variations et étude de la courbe

a. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions x et y. Préciser l'asymptote de la courbe.

b. Démontrer que : $x'(t) = \dfrac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t(t-1)^2}{\left(1+t^2\right)^2}$.

c. Étudier les variations des fonctions x et y. Rassembler les résultats dans un tableau de variations.

d. Donner une équation de la droite (Δ) tangente à la courbe (Γ) au point E de paramètre $t = 1$.

2. Étude de la courbure

a. Démontrer que : $x''(t) = \dfrac{2\left(1-3t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^3}$.

On admettra que : $y''(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t(t-1)\left(t^3-3t^2+5t+1\right)}{\left(1+t^2\right)^3}$.

b. Déterminer le rayon de courbure R de la courbe (Γ), au point A de paramètre $t = 0$.

Rappel : $R = \dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'}$.

c. On note (C) le cercle de courbure au point A.

i. Démontrer que $\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur unitaire de la tangente à (Γ) en A.

Préciser le vecteur $\vec{n}$ tel que le repère $\left(\mathrm{A}\,;\,\vec{\jmath},\,\vec{n}\right)$ soit un repère orthonormal direct.

ii. Démontrer que le cercle (C) a pour centre le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$.

iii. Déterminer une équation cartésienne du cercle (C).

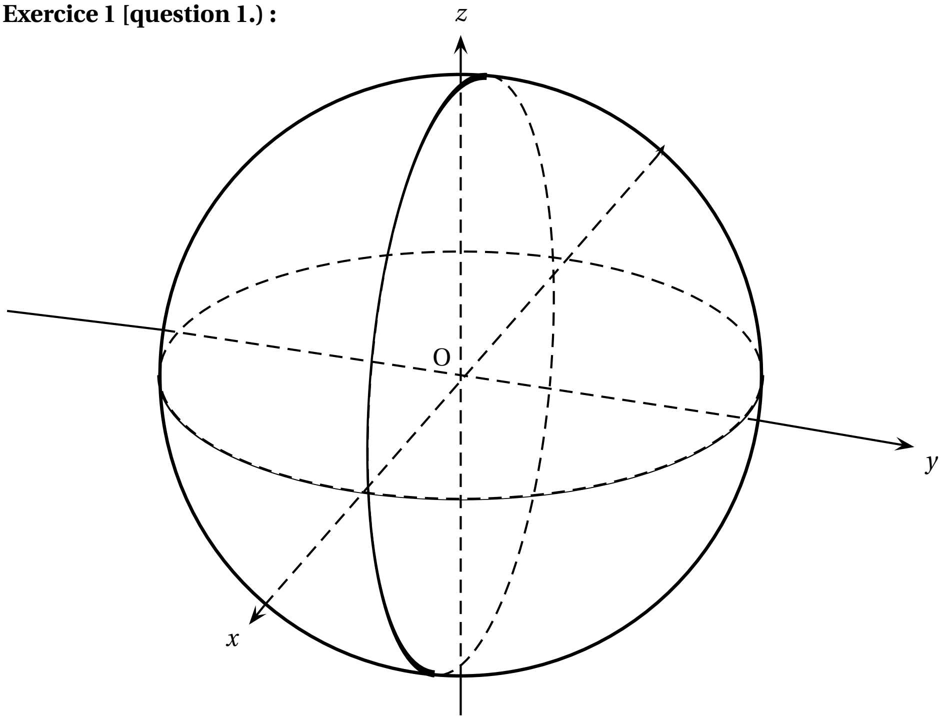
3. Tracé de la courbe (Γ)

a. Compléter le tableau de valeurs en annexe 1 ; on donnera des valeurs arrondies à 10^{-2} près.

b. Tracer la courbe (Γ), le cercle (C) et la droite (Δ) sur la feuille donnée en annexe 2.

ANNEXE 1 (À RENDRE AVEC LA COPIE)

Exercice 1 [question 1.) :



Exercice 2 [question 3. a.) :

Tableau de valeurs à compléter :

Point	M_{-2}	A	E	M_2
t	-2	0	1	2
$x(t)$				
$y(t)$				

ANNEXE 2 (À RENDRE AVEC LA COPIE)

Exercice 2 [question 3. a.) :