Brevet de technicien supérieur session 2003 - Géomètre topographe

Exercice 1 **10 points**

Partie A

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique sur chaque axe : 4 cm), on considère la courbe paramétrée E d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lll} x(t) & = & \cos 2t \\ y(t) & = & 2\sin 2t \end{array}\right.$$

1. Faire l'étude de cette courbe paramétrée après avoir justifié que l'intervalle d'étude peut se réduire à $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Tracer la courbe E.
3. Montrer que cette courbe est en fait une ellipse dont on calculera les éléments caractéristiques.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le cercle C de centre O contenu dans le plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ayant pour rayon le demi grand axe de l'ellipse E.
Soient A et B deux points de l'espace de coordonnées respectives $\left(\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,0\right)$ et $\left(\sqrt{2}\,;\,-\sqrt{2}\,;\,0\right)$.

1. Soit S la sphère obtenue en faisant tourner C autour de l'axe (Ox).
   Écrire une équation de la sphère S.
2. Montrer que les points A et B appartiennent à la sphère S.
3. Soit N le pôle nord de la sphère S. Déterminer les coordonnées sphériques des points N, A et B.
4. Déterminer les 6 éléments caractéristiques du triangle sphérique NAB.
5. Calculer l'aire du triangle sphérique NAB.
   *O*n rappelle les formules concernant un triangle sphérique ABC :
   $\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A$
   $\text{aire(ABC)} = (\text{A} + \text{B} + \text{C} - \pi)\cdot R^2$
   (R = rayon de la sphère).

Exercice 2 **10 points**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soit K(0 ; 0 ; 3) et C le cône de révolution d'axe $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{k}\right)$ et de demi angle au sommet $\frac{\pi}{4}$.

1. Montrer qu'une équation cartésienne de C est $x^2 + y^2 = (3 - z)^2$.
2. Soit E l'intersection du cône C et du plan d'équation $z = 0$. Donner une équation cartésienne de E, sa nature et ses éléments caractéristiques.

3. Soit $\Omega(-3\,;\,0\,;\,0)$ et soit I la transformation de l'espace qui, à tout point M de l'espace, associe le point M' qui vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \dfrac{6}{\Omega M^2}\overrightarrow{\Omega M}$.

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de I.

b. Soit $A(3\,;\,0\,;\,0)$ et $B(0\,;\,3\,;\,0)$. Déterminer $A' = I(A)$ et $B' = I(B)$.

c. Soit D la droite de l'espace déterminée par :

$$\text{D}\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Montrer que l'image de E par I est la droite D.

4. Soit Δ la droite de l'espace de représentation paramétrique $\Delta\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & -\dfrac{9}{4} \\ y(t) & = & t \\ z(t) & = & 0 \end{array}\right.$

a. Soit $M(x(t)\,;\,y(t)\,;\,z(t))$ un point de Δ. Soit $M'(x'(t)\,;\,y'(t)\,;\,z'(t))$ son image par I. Montrer que : $x'(t) = \dfrac{\frac{45}{16} - 3t^2}{\frac{9}{16} + t^2}$; $y'(t) = \dfrac{6t}{\frac{9}{16}+t^2}$; $z'(t) = 0$.

b. En déduire que l'image de la droite Δ par I est contenue dans la sphère S, de centre F$(1\,;\,0\,;\,0)$ et de rayon 4.