Brevet de technicien supérieur Design d'espace session 2004

Exercice 1 **10 points**

A. Étude des variations d'une fonction

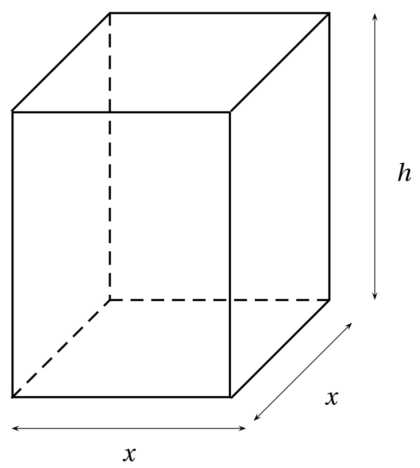
Soit f la fonction définie sur [0,5 ; 2] par

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour tout x de [0,5 ; 2].
   b. Vérifier que, pour tout x de [0,5 ; 2]
$$f'(x) = \frac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x^2}$$
2. On admet que, pour tout x de [0,5 ; 2], $\dfrac{2(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x^2} > 0$.
   En déduire, dans un tableau, le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans [0,5 ; 2].
3. Établir le tableau de variations de f.
4. Indiquer pour quelle valeur de x, f admet un minimum.

B. Application à un problème d'optimisation

Un fabriquant doit réaliser un réservoir en plastique sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont exprimées en mètres.
La hauteur est h et la base est un carré de côté x, comme le montre la figure suivante.
On admet que $0,5 \leqslant x \leqslant 2$.



1. **a.** Exprimer le volume V en m^3, du réservoir en fonction de x et h.
   b. On se propose de construire un réservoir dont le volume est 0,5 m^3.
   À l'aide du a., donner l'expression de h en fonction de x lorsque $V = 0,5$.
2. On note $S(x)$ l'aire totale du réservoir sans couvercle.
   Démontrer que $S(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

3. a. Déduire de la partie A la valeur de x pour laquelle l'aire totale du réservoir est minimale, c'est-à-dire pour laquelle le coût de fabrication de ce réservoir est minimal.

   b. Déterminer les valeurs correspondantes de S et de h.

Exercice 2 **10 points**

Exemple de courbe de Bézier définie par points de définition et polynômes de Bernstein.

Dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 centimètres, on donne les points suivants par leurs coordonnées : A$(1\ ;1)$, B$(3\ ;\ 2)$ et C$(4\ ;\ 1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer et de tracer une courbe possédant les propriétés suivantes :

— elle passe par les points A, B et C;

— elle admet le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ pour vecteur directeur de la tangente à la courbe au point A;

— elle admet le vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ pour vecteur directeur de la tangente à la courbe au point C.

Pour tout nombre t de l'intervalle $[0\,;1]$, soit M le point défini par :

$$\overrightarrow{\text{O}M} = (1-t)^2\overrightarrow{\text{OA}} + 2t(1-t)\overrightarrow{\text{OB}} + t^2\overrightarrow{\text{OC}}.$$

1. Calculer en fonction de t les coordonnées x et y du point M.

2. On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$f(t) = t^2 + 4t + 1 \quad \text{et} \quad g(t) = -2t^2 + 2t + 1.$$

   Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0\,;1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. On note Γ la courbe, dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lll} x & = & f(t)\\ y & = & g(t)\end{array}\right.$ où t appartient à l'intervalle $[0\,;1]$.

   a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point A et que le vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point C.

   b. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point S obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$.

   c. Tracer avec précision les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{BC}}$, la tangente au point S, puis la courbe Γ.
   (On rappelle que l'unité graphique est 2 cm.)

   La courbe Γ *ainsi obtenue est la courbe de Bézier dont A, E, C sont les points de définition.*