Brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2001

Exercice 1 **6 points**

Les trois parties A, B, C de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les cotes sont exprimées en millimètres.
Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur des pièces sont conformes à la norme en vigueur.

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

On note E l'évènement : « une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme ».
On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,9.
On prélève au hasard 10 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 10 pièces.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 8 pièces au moins soient conformes.

Partie B

Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique notée « machine 1 ».
Soient M et N les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associent respectivement sa longueur et sa largeur.
On suppose que M suit la loi normale de moyenne $m_1 = 250$ et d'écart type $\sigma_1 = 1,94$.
On suppose que N suit la loi normale de moyenne $m_2 = 150$ et d'écart type $\sigma_2 = 1,52$.

1. Calculer la probabilité que la longueur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 246 et 254.
2. Calculer la probabilité que la largeur d'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit comprise entre 147 et 153.
3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et si sa largeur est comprise entre 147 et 153.

   On admet que les variables M et N sont indépendantes.

   Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est $0,914$.

Partie C

Une autre machine automatique de l'entreprise, notée « machine 2 » fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité.
On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est $p_1 = 0,914$ et que la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production d'une journée de la machine 2 soit conforme est $p_2 = 0,879$.
La machine 1 fournit 60 % de la production totale de ces pièces et la machine 2 le reste de cette production.
On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise de la journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées.
On définit les évènements suivants :
A : « la pièce provient de la machine 1 » ;
B : « la pièce provient de la machine 2 » ;
C : « la pièce est conforme ».

1. Déterminer les probabilités $P(\text{A})$, $P(\text{B})$, $P(\text{C}/\text{A})$, $P(\text{C}/\text{B})$.
   (On rappelle que $P(\text{C}/\text{ A})$ est la probabilité de l'évènement C sachant que l'évènement A est réalisé.)
2. En déduire $P(\text{C} \cap \text{A})$ et $P(\text{C} \cap \text{B})$.
3. En admettant que $\text{C} = (\text{C} \cap \text{A}) \cup (\text{C} \cap \text{B})$, calculer $P(\text{C})$.

Exercice 1 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle
On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.
   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x}$.
Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1. **a.** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. On admet que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu au b.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{2x}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
   c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ et, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$.

   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

   c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage de ce point.

   d. Tracer T dans le repère de l'annexe.

C. Calcul intégral

1. Soit α un réel strictement négatif ; on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Démontrer que $I(\alpha) = -\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2\alpha}$. On pourra effectuer une intégration par parties.

2. **a.** Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

   b. À l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 3 **6 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 10 centimètres.

A - Étude de fonctions et tracé d'une courbe paramétrée

À tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;1]$, on associe le point $M(t)$ de coordonnées

$$x = f(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = g(t) = \frac{t^2}{2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe ensemble des points $M(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[0\,;1]$.

1. Étudier les variations des fonctions f et g sur $[0\,;1]$ et regrouper les résultats dans un même tableau.
2. Préciser les tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ aux points $\mathrm{M}(0)$, $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{M}(1)$ obtenus pour $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ et $t = 1$.

   Construire ces tangentes et la courbe $(\mathscr{C})$

B - Détermination géométrique et tracé d'une seconde courbe paramétrée

On donne les points A $(1\,;0)$ et B$(1\,;1)$ par leurs coordonnées.
Pour tout nombre t de l'intervalle $[0\,;1]$, soit $N(t)$ le point défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}N(t)} = \frac{(1-t)^2}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{t^2}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

1. Montrer que les coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ du point $N(t)$ sont : $x_1 = \dfrac{1}{2} - t + t^2$ et $y_1 = \dfrac{t^2}{2}$.
2. Pour tout nombre t de l'intervalle $[0\,;1]$, soit $I(t)$ le milieu du segment $[M(t)N(t)]$, où le point $M(t)$ de coordonnées $(x\,;\,y)$ est défini dans la partie A et où le point $N(t)$ de coordonnées $\left(x_1\,;\,y_1\right)$ est défini dans la partie B.

   On observe que les points $M(t)$ et $N(t)$ ont la même ordonnée.

a. Montrer que l'abscisse $\dfrac{x + x_1}{2}$ du point $I(t)$ est constante.

b. En déduire que $N(t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à une droite (D) dont on donnera une équation.

3. On note $(\mathscr{C}_1)$ la courbe ensemble des points $N(t)$ obtenus lorsque t varie dans $[0\,;\,1]$. En utilisant la symétrie mise en évidence à la question 2. b., tracer la courbe $(\mathscr{C}_1)$ dans le même repère que la courbe $(\mathscr{C})$.

Les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}_1)$ sont deux cas particuliers d'un même modèle de base intervenant dans les logiciels de conception assistée par ordinateur (CAO) utilisés notamment en mécanique, en aéronautique et dans l'industrie automobile.