

œ Brevet de technicien supérieur œ
Conception de produits industriels session 2009

A. P. M. E. P.

Exercice 1

4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions, une seule réponse A, B, C est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification.

Notation :

Chaque réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Soient M et N les matrices définies par $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
La somme $M + N$ est :	$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Avec les mêmes données qu'au 1. :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit $M \times N$ est :	$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ 7 & -3 & 9 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -7 & -3 & -3 \\ 0 & 9 & -2 \end{pmatrix}$

3. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de sens direct de L 'espace. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont :	orthogonaux	colinéaires	ni orthogonaux ni colinéaires

4. Avec les mêmes données qu'au 3.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est :	$\vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{0}$	$\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

Exercice 2

8 points

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + xy = x.$$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation différentielle

$$(E_0): y' + xy = 0.$$

2. Démontrer que la fonction constante g , définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 1$, est une solution particulière de l'équation (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction et réalisation d'une figure

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 4 centimètres.

1. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
2. a. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$.
b. Donner le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
3. a. Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe \mathcal{C} dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) défini au début de la partie B.
b. Tracer dans le même repère que la courbe \mathcal{C} la courbe \mathcal{D} d'équation $y = 2 - \frac{x^2}{2}$.

On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction définie par

$$x \mapsto 2 - \frac{x^2}{2}$$

On constate que les courbes \mathcal{C} et \mathcal{D} sont proches l'une de l'autre sur l'intervalle $[-0,5; 0,5]$.

C. Détermination d'une valeur approchée d'une intégrale

Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_{-0,5}^{0,5} f(x) dx$$

1. a. En utilisant le développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle, déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.
b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 - \frac{x^2}{2} + x^2 \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.
2. a. On note $J = \int_{-0,5}^{0,5} \left(2 - \frac{x^2}{2}\right) dx$.
Démontrer que $J = \frac{47}{24}$. Donner la valeur approchée de J arrondie à 10^{-3} .
b. Un logiciel donne $I \approx 1,960$. Vérifier que cette valeur approchée de I et la valeur approchée de J obtenue à la question a. diffèrent de 2×10^{-3} .

Exercice 3**8 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 2 centimètres. On se propose de construire la courbe B-spline obtenue à partir de quatre points de définition P_1, P_2, P_3 et P_4 et de trois polynômes de Riesenfeld du second degré.

Les quatre points sont donnés par leurs coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :

$$P_1(0; 3), P_2(1; -2), P_3(4; 3) \text{ et } P_4(2; 5).$$

La courbe B-spline cherchée est la réunion de deux arcs de courbe \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

A. Détermination d'une représentation paramétrique de l'arc de courbe \mathcal{C}_1

1. On rappelle que les polynômes de Riesenfeld R_i de degré 2, pour i prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis pour tout t appartenant à $[0; 1]$ par :

$$R_i(t) = 3 \sum_{j=0}^{j=2-i} (-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Démontrer que, pour tout t de $[0; 1]$, $R_0(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}$.

2. L'arc de courbe \mathcal{C}_1 est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_1(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_1(t)} + R_1(t)\overrightarrow{OP_2(t)} + R_2(t)\overrightarrow{OP_3(t)}.$$

On admet que pour tout t de $[0; 1]$: $R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2}$ et $R_2(t) = \frac{1}{2}t^2$.

Démontrer que l'arc de courbe \mathcal{C}_1 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = t^2 + t + \frac{1}{2} \\ y = g_1(t) = 5t^2 - 5t + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

B. Étude de variations et construction de la courbe B-spline

1. a. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1 sur $[0; 1]$, où f_1 et g_1 sont les fonctions définies à la question 2. de la partie A. Rassembler les résultats dans un tableau unique.
- b. Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe \mathcal{C}_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$, $M_1(1)$.
2. L'arc de courbe \mathcal{C}_2 est l'ensemble des points $M_2(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM_2(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_2(t)} + R_1(t)\overrightarrow{OP_3(t)} + R_2(t)\overrightarrow{OP_4(t)}.$$

On admet que l'arc de courbe \mathcal{C}_2 est défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 3t + \frac{5}{2} \\ y = g_2(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 5t + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2 est le suivant :

t	0	$\frac{1}{3}$	1		
$f_2'(t)$	3	+	0	-	-6
$f_2(t)$	$\frac{5}{2}$		3		1
$g_2'(t)$	5		+		2
$g_2(t)$	$\frac{1}{2}$		2		4

Donner un vecteur directeur de chacune des tangentes à l'arc de courbe \mathcal{C}_2 aux points \mathcal{C}_1 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$.

3. On rappelle que le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) où l'unité graphique est 2 centimètres.
 - a. Construire sur une feuille de papier millimétré, les tangentes à l'arc de courbe \mathcal{C}_1 aux points $M_1(0)$, $M_1(\frac{1}{2})$ et $M_1(1)$, puis l'arc de courbe \mathcal{C}_1 .
 - b. Construire, sur le même graphique, les tangentes à l'arc de courbe \mathcal{C}_2 aux points $M_2(0)$, $M_2(\frac{1}{3})$, $M_2(1)$, puis l'arc de courbe \mathcal{C}_2 .
 - c. Placer les points de définition sur la figure.
4.
 - a. Donner les coordonnées du point I où se raccordent les arcs de courbe \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
 - b. Montrer que la tangente commune à l'arc \mathcal{C}_1 et à l'arc \mathcal{C}_2 au point I est la droite (P_2P_3) .