Brevet de technicien supérieur
Chimiste session 2015

Exercice 1 **10 points**

En chimie, les lois cinétiques conduisent à des équations différentielles dont la résolution permet de prévoir, à chaque instant, les concentrations des produits en présence. L'exercice décrit une situation en distinguant l'étude mathématique de l'interprétation des résultats.

Partie I : Équations différentielles

Un formulaire concernant les équations différentielles est donné en annexe 2.

Soit le système (S) $\left\{\begin{array}{lllll} x' &=& -3x & & (1)\\ y' &=& 3x & -y \quad +z & (2)\\ z' &=& & y \quad -z & (3)\end{array}\right.$
avec les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$.

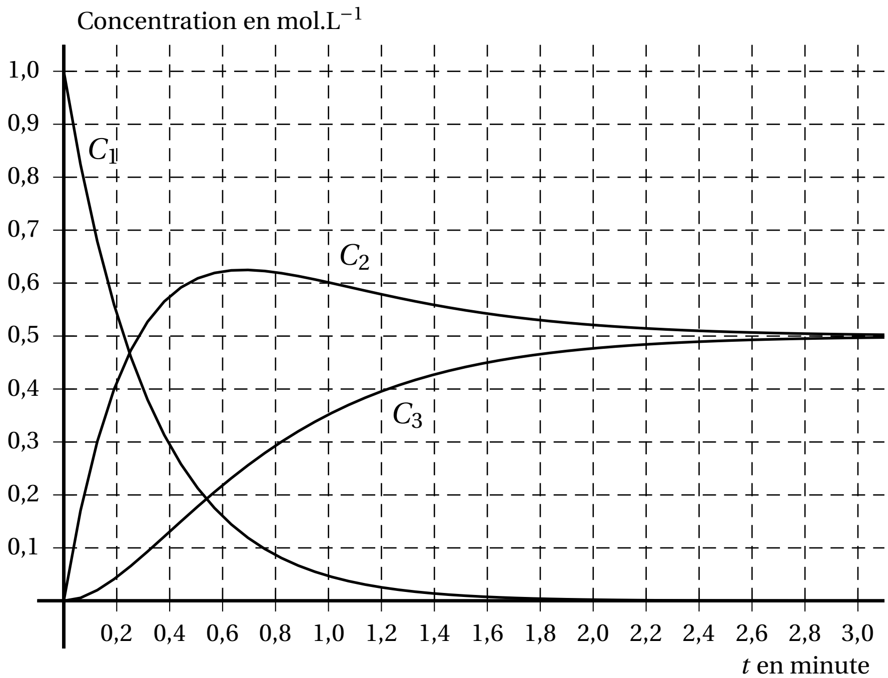
1. **a.** Résoudre l'équation (1).
   b. En déduire $x(t)$ en tenant compte de la condition initiale $x(0) = 1$.
2. **a.** En utilisant l'équation (3), exprimer y en fonction de z et z' puis en déduire l'expression de y' en fonction de z'' et z'.
   b. En reportant dans l'équation (2) les résultats obtenus dans les questions **1.** et **2. a.**, en déduire que z est solution de l'équation différentielle (E) : $z'' + 2z' = 3\mathrm{e}^{-3t}$.
3. **a.** Résoudre l'équation différentielle $z'' + 2z' = 0$.
   b. Déterminer le réel α tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \alpha\mathrm{e}^{-3t}$ soit une solution de l'équation (E).
   c. En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions z définies par $z(t) = \lambda + \mu\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}$ où λ et μ sont des constantes réelles.
4. En utilisant l'équation (3), en déduire l'expression de $y(t)$ en fonction de λ et μ.
5. En sachant que $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$, déterminer les constantes λ et μ.
   En déduire $z(t)$ et $y(t)$.

Partie II

On considère le schéma réactionnel : $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \leftrightarrows \mathrm{C}$ impliquant les produits A, B et C.
On suppose que les fonctions f, g et h qui à l'instant $t \geqslant 0$, exprimé en minute, associent les concentrations [A] de A, [B] de B et [C] de C, exprimées en mole par litre, sont respectivement les fonctions définies par :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-3t} \;,\; g(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} - 2\mathrm{e}^{-3t} \;,\; h(t) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{-3t}$$

Les trois courbes C_1, C_2, C_3 tracées ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f, g et h.



1. **a.** Calculer $f'(t)$.

   b. Déterminer le sens de variation de la fonction f. En déduire laquelle des trois courbes représente la fonction f.

2. **a.** Calculer l'instant t pour lequel les concentrations des produits A et C sont égales. On donnera une valeur exacte et une valeur de t arrondie à 0,01.

   b. En déduire la courbe qui est la représentation graphique de la fonction h.

3. **a.** Graphiquement, conjecturer la concentration finale du produit C.

   b. Retrouver le résultat par un calcul de limite.

Exercice 2 **10 points**

Partie I

Soit X la variable aléatoire mesurant la durée de vie, en jours, d'un atome radioactif d'iode 131 avant sa désintégration.
X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,087$ (exprimé en jour^{-1}).

Rappel : Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ, la probabilité $P(X \leqslant t)$ est égale à $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. **a.** Montrer que $P(X \leqslant 6) = 1 - \mathrm{e}^{-0,522}$ et en donner une valeur approchée arrondie à 0,01.

   b. Donner de même une valeur arrondie à 0,01 de $P(X \leqslant 4)$.

2. Soient les évènements suivants concernant un atome d'iode 131 :
   E : « sa durée de vie est d'au moins 6 jours ».
   F : « sa durée de vie est d'au moins 4 jours ».

   a. Que représente l'évènement E∩F ? Déterminer sa probabilité.

   b. Calculer la probabilité qu'un atome d'iode 131 ait une durée de vie d'au moins 6 jours, sachant qu'il n'a pas été désintégré au bout de 4 jours.

3. Déterminer le réel t tel que $P(X \leqslant t) = 0,5$, on donnera la valeur exacte de t puis une valeur approchée arrondie à l'unité.

Partie II

Un laboratoire pharmaceutique commercialise des ampoules contenant de l'iode 131.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque ampoule, associe la masse d'iode 131, en mg, contenue dans un millilitre de solution.
On considère que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ.

A : Probabilités

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour les deux premières questions, on pose $\mu = 370$ et $\sigma = 1,2$.

1. Une ampoule est commercialisable si la masse d'iode par mL est comprise entre 368 et 372.

La probabilité arrondie à 0,001, qu'une ampoule soit **non commercialisable** est égale à :

Réponse a	Réponse b	Réponse c
0,201	0,096	0,052

2. Soit α le réel tel que $P(370 - \alpha \leqslant X \leqslant 370 + \alpha) = 0,95$.

Une valeur arrondie à 0,01 de α est égale à :

Réponse a	Réponse b	Réponse c
2,35	2	3,53

Pour les questions suivantes, on arrondit la probabilité p qu'une ampoule soit non commercialisable àla valeur $p = 0,1$.

On prélève au hasard un échantillon de 100 ampoules. La production est assez importante pour que l'on assimile le prélèvement à un tirage avec remise.

On désigne par Y la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 ampoules, associe le nombre d'ampoules non commercialisables.

Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,1$.

3. Soit P_1 la probabilité qu'il y ait exactement une ampoule non commercialisable dans l'échantillon.

Une valeur arrondie à 10^{-6} de P_1 est égale à :

Réponse a	Réponse b	Réponse c
$2,95 \times 10^{-4}$	$0,1$	$0,09$

4. Soit P_2 la probabilité qu'il y ait au moins deux ampoules non commercialisables dans l'échantillon.

Une valeur de P_2 arrondie à 10^{-4} est égale à :

Réponse a	Réponse b	Réponse c
0,01	0,999 7	0,998 4

5. On considère que la loi Y est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ.

Quelle valeur de λ semble être la plus appropriée ?

Réponse a	Réponse b	Réponse c
0,1	10	3,16

B : Test d'hypothèse

Dans cette question, on suppose que $\sigma = 1,2$.
Le laboratoire indique que chaque ampoule contient 370 mg d'iode 131 par mL.
On se propose de construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de refuser cette affirmation, au risque 5%.
On désigne par μ la moyenne en mg de la masse d'iode 131 contenue dans une ampoule.
On prélève au hasard un échantillon de n ampoules, la production étant assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On prendra pour hypothèse nulle H_0 : $\mu = 370$ et pour hypothèse alternative H_1 : $\mu \neq 370$.
Soit $\overline{X_n}$ la variable aléatoire qui à chaque échantillon de n ampoules prélevées au hasard, associe la masse moyenne d'iode 131 par mL contenue dans ces n ampoules.
On admet que $\overline{X_n}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma' = \dfrac{1,2}{\sqrt{n}}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 100$.
$\overline{X_{100}}$ suit donc la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma' = 0,12$.

a. Déterminer le réel h tel que, sous l'hypothèse H_0,
$P(370 - h \leqslant \overline{X_{100}} \leqslant 370 + h) = 0,95$. On donnera une valeur approchée de h arrondie à 10^{-3}.

b. Énoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

c. Pour un échantillon de 100 ampoules prélevées au hasard, la masse moyenne d'iode 131 par mL est $\overline{x} = 370,4$.
Peut-on considérer, au risque 5%, que $\mu = 370$?

2. Le but de cette question est de trouver à partir de quelle valeur de l'effectif n, on a $P\left(370 - 0,2 \leqslant \overline{X_n} \leqslant 370 + 0,2\right) \geqslant 0,95$ où $\overline{X_n}$ suit la loi normale de moyenne 370 et d'écart-type $\sigma' = \dfrac{1,2}{\sqrt{n}}$.

a. Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau donné en **Annexe 1 à rendre avec la copie**.

b. En déduire la valeur n cherchée.

Annexe 1
à rendre avec la copie

Exercice 2, Partie II
B 2. a.

Effectif n	$\sigma' = \dfrac{1,2}{\sqrt{n}}$ (arrondi à 10^{-4})	$P\left(370 - 0,2 \leqslant \overline{X_n} \leqslant 370 + 0,2\right)$ (arrondi à 10^{-4})
120	0,109 5	0,932 1
138		
139		
140		

Annexe 2
Formulaire : équations différentielles

Équation	Solutions
$ay' + by = 0$, $a \neq 0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$
$ay'' + by' + cy = 0$, $a \neq 0$ équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $f(t) = \left[\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\right] \mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes de l'équation caractéristique.