Brevet de technicien supérieur
Chimiste session 2012

Exercice 1 **10 points**

On étudie la dissolution d'un composé salin dans l'eau : à l'instant initial on introduit 300 grammes de ce composé dans un litre d'eau. Pour t réel positif on note $f(t)$ la quantité (exprimée en grammes) de composé non encore dissous à l'instant t (exprimé en minutes) et l'on admettra que la fonction f ainsi définie vérifie $f(t) > 0$, $f(0) = 300$ ainsi que l'équation différentielle :

$$f'(t) = kf(t) \times \left(f(t) - 50\right),\quad k \text{ étant une constante réelle,}\quad k < 0.$$

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. On définit la fonction g sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

a. Exprimer $g'(t)$ en fonction de $f(t)$ et $f'(t)$.

b. En déduire pour tout réel t positif la relation : $g'(t) = 50kg(t) - k$.

2. On considère les deux équations différentielles :

(E) : $y' = 50ky - k$ et (E_0) : $y' = 50ky$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

a. Résoudre l'équation (E_0).

b. Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E) puis en déduire les solutions de l'équation (E).

c. A l'aide de la question précédente et de la condition initiale $f(0) = 300$, déterminer l'expression de $g(t)$ en fonction de t et k.

d. En déduire que l'expression de $f(t)$ est : $f(t) = \dfrac{300}{6 - 5\mathrm{e}^{50kt}}$.

Partie B : Étude d'une fonction

1. Déterminer le sens de variation de f.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

Partie C : Applications

1. À l'instant $t_1 = 10$ il reste 100 grammes de composé non dissous.

En déduire la valeur exacte de la constante k puis en donner une valeur approchée à 10^{-5} près.

2. On considère que la solution salée obtenue est saturée lorsque 240 grammes du composé ont été dissous.

Déterminer à 0,01 près l'instant t_2 auquel cette solution est saturée.

Exercice 2 **10 points**

Les deux parties A et B sont indépendantes

Partie A

La conductivité thermique d'un alliage est sensible aux teneurs (exprimées en pourcentages) en les métaux le constituant. On s'intéresse ici aux variations de cette conductivité selon les teneurs respectives en deux métaux particuliers parmi ceux constituant un alliage donné. Les facteurs intervenant sont les suivants :
$\mathbf{X_1}$: facteur représentant la teneur en métal M_1, celle-ci pouvant varier dans l'intervalle [4 ; 4,8].
$\mathbf{X_2}$: facteur représentant la teneur en métal M_2, celle-ci pouvant varier dans l'intervalle [0,7 ; 1,5].
Les niveaux attribués aux facteurs sont donnés par le tableau ci-dessous :

Niveaux	-1	1
Teneur en M_1 (%)	4	4,8
Teneur en M_2 (%)	0,7	1,5

On note **Y** la conductivité thermique de l'alliage (exprimée en $Wm^{-1}K^{-1}$).
On réalise un plan factoriel 2^2 dont les quatre expériences donnent les résultats suivants :

Expérience	Teneur en M_1	Teneur en M_2	Réponse **Y** (conductivité)
1	4	0,7	134
2	4,8	0,7	140
3	4	1,5	118
4	4,8	1,5	120

1. On considère que l'expression de **Y** suit un modèle polynomial de la forme :
$\mathbf{Y} = a_0 + a_1\mathbf{X_1} + a_2\mathbf{X_2} + a_{12}\mathbf{X_1X_2} + \epsilon$, la variable aléatoire ϵ étant négligée dans les calculs.

a. Reproduire et compléter sur la copie la matrice de calcul des effets construite selon l'algorithme de Yates :

Expérience	Moyenne	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{X_1X_2}$	**Y**
1					
2					
3					
4					
Effets	a_0	a_1	a_2	a_{12}	

b. Prouver que l'expression du modèle est : $\mathbf{Y} = 128 + 2\mathbf{X_1} - 9\mathbf{X_2} - \mathbf{X_1X_2} + \epsilon$; on présentera le calcul des estimations des effets sur la copie.

c. La plus grande conductivité observée lors des quatre expériences se situe dans l'expérience 2.

Justifier, en utilisant l'expression du modèle, qu'iI s'agit de la conductivité maximale que I'on peut obtenir lorsque les facteurs varient dans leurs intervalles respectifs.

d. On fixe la teneur en M_1 à la valeur 4,4 ($\mathbf{X_1} = 0$). La conductivité **Y** est alors une fonction de $\mathbf{X_2}$.

Quel est son sens de variation ?

2. On souhaite fabriquer un alliage dont la conductivité est égale a 128 $Wrn^{-1}K^{-1}$.
À l'aide de l'expression du modèle, justifier qu'il suffit de choisir des teneurs égales à 4,4 en M_1 et 1,1 en M_2 pour réaliser un tel alliage.

3. On souhaite toujours fabriquer un alliage dont la conductivité est égale à 128 $Wm^{-1}K^{-1}$ mais avec la contrainte suivante : la teneur en métal M_1 doit être égale à 4 ($\mathbf{X_1} = -1$).

a. Prouver que le facteur $\mathbf{X_2}$ doit prendre la valeur $-0,25$.

b. Dans cette question on cherche à déterminer à quelle teneur en M_2 correspond la condition $\mathbf{X_2} = -0,25$.

Soit f une fonction définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = ax + b$, a et b étant deux réels.

Déterminer a et b tels que l'on ait $f(-1) = 0,7$ et $f(1) = 1,5$, puis en déduire la teneur en M_2 à choisir pour réaliser l'alliage.

Partie B

Une chaîne de fabrication produit des pièces faites de l'alliage précédent ; on note m la moyenne des conductivités des pièces fabriquées par cette chaine ; afin de tester son bon fonctionnement on met en place un test d'hypothèse bilatéral au risque de 1 %. On donne l'hypothèse nulle H_0 : $m = 128$.

1. Quelle est l'hypothèse alternative H_1 ?

2. Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire égale à la moyenne des conductivités des pièces d'un échantillon aléatoire de taille 64 ; on admet que X suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\dfrac{3}{\sqrt{64}}$.

Sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 0,01 près du réel h telle que : $P(m - h < X < m + h) = 0,99$.

3. Enoncer la règle de décision du test.

4. On dispose d'un échantillon aléatoire de taille 64 dont on a mesuré la conductivité des pièces :

Conductivité	124	125	126	127	128	129	130	131
Effectif	3	5	8	13	16	11	7	1

D'après cet échantillon et, au risque de 1 %, peut-on considérer que l'on a $m = 128$?