Brevet de technicien supérieur
Chimiste session 2010

Exercice 1 **9 points**

On considère deux réactions totales et successives d'ordre 1 dans un milieu homogène. Celles-ci concernent trois produits A, B et C, le schéma est le suivant :

$\mathrm{A} \xrightarrow{k_1} \mathrm{B} \xrightarrow{k_2} \mathrm{C}$ (k_1 et k_2 sont des constantes positives telles que $k_1 \neq k_2$).

On nomme x, y et z les concentrations relatives des produits A, B et C à l'instant t (en minutes), $t \geqslant 0$.
Les conditions initiales sont les suivantes : $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$.

Partie A

Détermination des concentrations

1. L'étude cinétique permet d'abord d'écrire l'équation différentielle

$$(1) : \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1 x$$

a. Résoudre l'équation (1).

b. Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale $x(0) = 1$.

2. L'étude cinétique permet ensuite d'écrire l'équation (2) : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + k_2 y = k_1 \mathrm{e}^{-k_1 t}$.

a. Trouver un réel α tel que la fonction f définie par $f(t) = \alpha \mathrm{e}^{-k_1 t}$ soit une solution particulière de l'équation (2).

b. Résoudre l'équation (2).

c. Déterminer la solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

3. D'après le principe de conservation de la matière, on a, pour tout nombre réel t positif :

$$x(t) + y(t) + z(t) = x(0) + y(0) + z(0).$$

Exprimer alors $z(t)$ en fonction de t.

Partie B

Étude des variations des concentrations dans le cas où $k_1 = 0,5$ et $k_2 = 1$ (en min^{-1})

On a dans ce cas : $x(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}$, $y(t) = \mathrm{e}^{-0,5t} - \mathrm{e}^{-t}$ et $z(t) = 1 - 2\mathrm{e}^{-0,5t} + \mathrm{e}^{-t}$

1. Quel est le sens de variation de la fonction x ?

2. Après avoir montré que la dérivée y' de y est définie par

$$y'(t) = \mathrm{e}^{-0,5t}\left(-0,5 + \mathrm{e}^{-0,5t}\right),$$

montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction y admet un maximum M que l'on déterminera ainsi que l'instant t_M tel que $y(t_M) = M$.

3. Étudier les variations de la fonction z sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On précisera la limite de z en $+\infty$.

Exercice 2 **11 points**

les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Un technicien étudie le courant d'électrolyse traversant une cellule contenant une solution d'un électrolyte donné. Il souhaite optimiser ce courant en faisant varier trois facteurs : la dilution de la solution, comprise entre 10 % et 90 %, la température de la solution, comprise entre 50 °C et 80 °C, et la surface de l'électrode comprise entre 5 et 10 cm^2.
Il va réaliser un plan d'expérience 2^3, sans tenir compte des interactions, construit selon l'algorithme de Yates.

Le courant traversant le circuit est ensuite mesuré et est exprimé par le rapport de ce courant à un courant servant de référence, ce qui permet de l'exprimer en pourcentage. Cette valeur Y est modélisée par une expression de la forme :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \varepsilon$$

où l'on ne tient pas compte des interactions.
ε est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle.
X_1 représente la dilution, X_2 la température et X_3 la surface de l'électrode.
On attribue les niveaux suivants aux facteurs :

Niveau	-1	$+1$
Dilution	10 %	90 %
Température	50 °C	80 °C
Surface	5 cm^2	10 cm^2

Les résultats des huit expériences sont les suivants :

Expérience	1	2	3	4	5	6	7	8
Dilution	10 %	90 %	10 %	90 %	10 %	90 %	10 %	90 %
Température	50 °C	50°C	80°C	80°C	50°C	50°C	80°C	80°C
Surface	5 cm^2	5 cm^2	5 cm^2	5 cm^2	10 cm^2	10 cm^2	10 cm^2	10 cm^2
Courant	15 %	9 %	61 %	49 %	17 %	11 %	64 %	54 %

1. Compléter la matrice des effets sans interactions sur le tableau figurant dans l'annexe qui sera rendue avec la copie.
2. Calculer une estimation ponctuelle des coefficients a_0 , a_1 , a_2 et a_3 et donner l'expression du modèle.
3. Représenter graphiquement l'effet des facteurs X_1 et X_2.
4. Que conseilleriez-vous au technicien afin d'obtenir un courant maximum ?

Partie B

Dans les conditions de l'expérience réalisée par le technicien, on peut considérer que la variable aléatoire X qui, à chaque électrode tirée au hasard, associe sa durée de vie exprimée en heures, suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart-type 2.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une électrode prise au hasard ait une durée de vie d'au moins 30 heures ?
2. Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité pour qu'une électrode prise au hasard ait une durée de vie comprise entre 28 et 32 heures ?
3. Sachant que la durée de vie d'une électrode est supérieure à 30 heures, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'elle soit supérieure à 35 heures ?

Partie C

Dans cette question les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Une entreprise fabrique, en très grand nombre, des électrodes dont la surface, mesurée en cm^2, a pour moyenne inconnue μ et pour écart-type 0,18.

1. Le technicien a reçu 10 électrodes de cette production. Il a mesuré les surfaces, en cm^2 , des électrodes de cet échantillon extrait de la production de l'entreprise et il a obtenu les résultats suivants :

4,8 ; 5,3 ; 5,1 ; 5,0 ; 4,9 ; 5,0 ; 5,2 ; 4,8 ; 5,0 ; 5,2.

a. Calculer la moyenne des surfaces et, à 10^{-2} près, l'écart-type sur cet échantillon.

b. Donner une estimation ponctuelle de μ.

2. On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon non exhaustif de 10 électrodes, associe la moyenne de la surface de ces 10 électrodes en cm^2.

On admet que X suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\dfrac{0,18}{\sqrt{10}}$.

a. Donner un intervalle de confiance de μ avec un coefficient de confiance de 95 %.

b. Peut-on affirmer que la moyenne μ appartient à cet intervalle ? Expliquer la réponse.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Expériences	Moyenne	X_1	X_2	X_3	Passage du courant
1					15%
2					9%
3					61%
4					49%
5					17%
6					11%
7					64%
8					54%