Brevet de technicien supérieur session 2002 - Chimiste

Problème 1 **8 points**

Lorsqu'un fil conducteur est parcouru par un courant électrique d'intensité constante, celui-ci s'échauffe par effet Joule et sa température varie en fonction du temps. Désignons par $\theta(t)$ la température du conducteur exprimée en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes.
À l'instant de la mise sous tension, choisi comme instant origine ($t = 0$), la température du conducteur est celle du milieu ambiant : $\theta(0) = 18$ (condition initiale).
Dans les conditions de l'expérience, le bilan énergétique se traduit par l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad \theta'(t) + 10k\theta(t) = 2,\ t \geqslant 0$$

dans laquelle k est une constante qui dépend du conducteur et du milieu ambiant.

Partie A

On suppose, dans cette partie, que le conducteur est parfaitement isolé, c'est-à-dire que $k = 0$.

1. Écrire l'équation différentielle correspondant à $k = 0$ puis résoudre cette équation différentielle.
2. Représenter graphiquement les variations de θ dans un repère orthogonal d'unité graphiques : 1 cm en abscisse pour 2 secondes et 1 cm en ordonnée pour 2 °C.
3. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 30 °C.

Partie B

On suppose, dans cette partie, que le conducteur n'est pas thermiquement isolé et que $k = 5 \times 10^{-3}$.

1. Vérifier que la température du conducteur s'exprime par : $\theta(t) = 40-22\mathrm{e}^{-0,05t}$.
2. **a.** Calculer la température stationnaire du conducteur : $\theta_{\mathrm{e}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$.
   Donner l'interprétation graphique de ce résultat.

   b. Déterminer le développement limité de θ au voisinage de $t = 0$, à l'ordre 2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de θ en son point d'abscisse 0 et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente, au voisinage de $t = 0$.
3. **a.** Étudier les variations de θ en fonction de t.

   b. Construire la courbe représentative de θ sur le même graphique que dans la partie A.

   c. Calculer la température du conducteur à l'instant $t = 20$.

   d. Calculer le temps nécessaire pour que la température du conducteur atteigne 39,99 °C.

Problème 2 **12 points**

Un laboratoire de chimie est chargé de conditionner des flacons d'eau de toilette destinés à une parfumerie. On définit une variable aléatoire X associant à chaque flacon le volume de son contenu exprimé en cm^3. On suppose que X suit la loi normale de moyenne μ (inconnue) et d'écart type $\sigma = 0,036$.

Première partie

Dans cette partie, on prend pour μ la valeur annoncée par le fournisseur : $\mu = 43,041$.
Le cahier des charges indique que le flacon est conforme lorsque le volume de son contenu appartient à l'intervalle [42,970 ; 43,130].
On choisit un flacon au hasard dans la production.

1. Déterminer la probabilité pour qu'il soit conforme.
2. Trouver un intervalle centré en μ dans lequel le volume a 85 % de chances de se trouver.

Deuxième partie

À l'occasion d'une commande, le parfumeur reçoit du laboratoire un lot de flacons. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la moyenne μ de la production, avec la valeur $m = 43,041$ annoncée par le fournisseur. Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, il effectue un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 75 flacons pris dans le lot reçu.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Volume	142,930 ; 42,970[	[42,970 ; 43,010[	[43,010 ; 43,050[	[43,050 ; 43,090[	[43,090 ; 43,130]
Effectif	2	7	39	19	8

1. **Calcul de la moyenne**

   Calculer la moyenne de cet échantillon (arrondie à 10^{-3} près) en faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont respectivement celle du centre de chaque classe.
2. **Construction du test**
   On oppose l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = m$ à l'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq m$.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la moyenne d'échantillonnage $\overline{X}$? En préciser les paramètres.

   b. En se plaçant sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} près du réel h tel que : $P(\mu - h \leqslant \overline{X} \leqslant p + h) = 0,95$.

   c. En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H0 au seuil de risque de 5 %.

   d. Énoncer la règle de décision du test.
3. **Utilisation du test**
   Peut-on affirmer, au seuil de risque de 5 %, que la valeur m annoncée pour μ est correcte ?