∽ Brevet de technicien supérieur ∾ Conception de produits industriels 15 mai 2012

Exercice 1 **9 points**

Partie A

Dans le repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm, on considère les courbes de Bézier C_1 définie par les 3 points de définition P_0, P_1 et P_2 avec $P_0(0\,;\,0)$, $P_1(4\,;\,4)$ et $P_2(8\,;\,0)$ et C_2 définie par les 3 points de définition P_3, P_4 et P_5 avec $P_3(4\,;\,0)$, $P_4(8\,;\,4)$ et $P_5(12\,;\,0)$ (voir annexe 1).

On rappelle que la courbe de Bézier C définie par 3 points de définition P_0, P_1 et P_2 est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{O}M(t)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=2} B_{i,\,2}\overrightarrow{\text{O}P_i}$, $\quad t \in [0\,;\,1]$ où :

$$B_{0,\,2}(t) = (1-t)^2, \quad B_{1,\,2}(t) = 2t(1-t), \quad B_{2,\,2}(t) = t^2.$$

1. Utiliser la méthode barycentrique pour construire avec soin, en laissant les traits de construction, le point $M_1\left(\dfrac{1}{3}\right)$ point de C_1 de paramètre $t = \dfrac{1}{3}$ sur le graphique fourni en **annexe 1, à rendre avec la copie**.
2. Démontrer que, pour $t \in [0\,;\,1]$, un système d'équations paramétriques de C_1 est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & 8t \\ y_1(t) & = & 8t - 8t^2 \end{array}\right.$$

3. Étudier les variations de x_1 et y_1 sur $[0\,;\,1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.
4. **a.** À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau de valeurs situé en annexe 1, à rendre avec la copie.

   b. Compléter le tracé de C_1 sur le graphique fourni en annexe 1, à rendre avec la copie.

Pour la suite de l'exercice, on admet que pour $t \in [0\,;\,1]$, un système d'équations paramétriques de C_2 est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_2(t) & = & 4 + 8t \\ y_2(t) & = & 8t - 8t^2 \end{array}\right.$$

On note I le point d'intersection de C_1 et C_2, de coordonnées $\left(6\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.

5. **a.** Placer le point I sur le graphique. Déterminer par le calcul le paramètre correspondant à I sur C_1.

   b. On considère maintenant C_2. Déterminer par le calcul le paramètre correspondant à I sur C_2.

Partie B

On considère la courbe C_1 de la partie A dont une représentation paramétrique est .

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 8t \\ y & = & 8t - 8t^2 \end{array}\right.$$

pour t appartenant à $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Montrer que : $y_1(t) = x_1(t) - \frac{1}{8}(x_1(t))^2$.

   b. L'arc C_1 est-il un arc de parabole ? Justifier.

2. On pose $f(x) = x - \frac{1}{8}x^2$.

   a. Soit $J = \int_6^8 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de J.

   b. Interpréter J à l'aide de l'aire d'une partie de plan à préciser

   c. En déduire, en cm^2 l'aire du domaine hachuré sur l'**annexe 1** (on pourra utiliser la symétrie de C_1 et C_2 par rapport à la droite d'équation $x = 6$).

Exercice 2 **3 points**

Un mobile M a pour trajectoire, entre les instants $t = 0$ et $t = 1$, un arc C dont une représentation paramétrique dans un repère orthonormal est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 8t \\ y(t) & = & 8t - 8t^2 \end{array}\right.$$

On note $\overrightarrow{V(t)}$ le vecteur vitesse de M à l'instant t, c'est-à-dire le vecteur $\overrightarrow{V(t)}$ de coordonnées $\left(x'(t),\ y'(t)\right)$ où x' et x' sont les fonctions dérivées de x et de y sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. **a.** Justifier que $\overrightarrow{V(t)}\begin{pmatrix} 8 \\ 8 - 16t \end{pmatrix}$.

   b. Montrer que $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|^2 = 128 \times \left(2t^2 - 2t + 1\right)$.

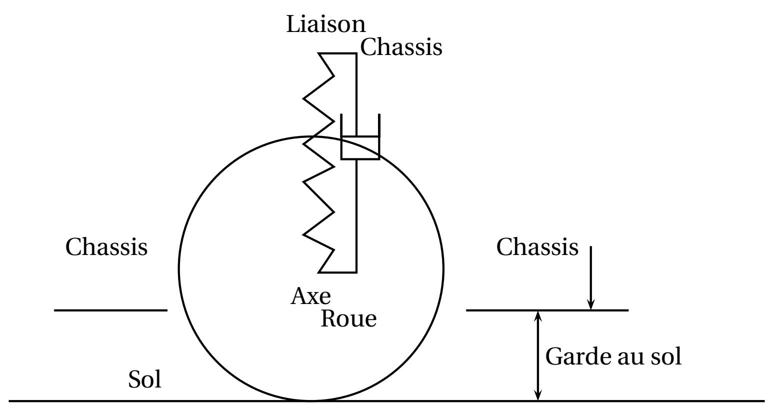
2. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(t) = 128 \times \left(2t^2 - 2t + 1\right)$. Établir son tableau de variation,

3. Déterminer le minimum de f sur $[0\,;\,1]$ et la valeur de t correspondante.

4. En déduire à quel instant t la vitesse du mobile, c'est-à-dire $\left\|\overrightarrow{V(t)}\right\|$, est minimale et déterminer cette vitesse minimale.

Exercice 3 **8 points**

La propulsion d'une automobile est assurée par des systèmes indépendants formés chacun d'un ressort hélicoïdal et d'un amortisseur à piston à huile montés entre l'arbre de roue et le châssis.



Lors d'un essai dynamique à vide, le châssis est abaissé puis libéré sans vitesse initiale :.

Partie A

Sous les conditions initiales de l'essai, la hauteur du châssis par rapport au sol, appelée garde au sol, est modélisée par une fonction f de la variable réelle t, définie sur $[0~;~+\infty[$ dont la courbe représentative C_f est donnée en annexe 2. La distance du châssis au sol est donnée en millimètres, le temps en secondes.

1. À l'aide du graphique, déterminer les conditions initiales $f(0)$ et $f'(0)$.

2. On admet que la fonction f, définie sur $[0~;~+\infty[$ s' exprime par

$$f(t) = (-150\cos(16t) - 112,5\sin(16t))\text{e}^{-12t} + 250$$

a. Montrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \longmapsto \text{e}^{-12t}$ est : $\text{e}^{-12t} = 1 - 12t + 72t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} = 0$.

b. On admet les développements limités d'ordre 2, au voisinage de 0, suivants :

$\sin(16t) = 16t + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$

$\cos(16t) = 1 - 128t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$

Montrer que le développement limité, d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$f(t) = 1OO + 30\,000t2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t \to 0} \epsilon(t) = 0$

c. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative C, au point d'abscisse 0.

d. Retrouver les conditions initiales de la question 1.

Partie B

Pour le confort des passagers, on souhaite choisir un amortisseur permettant un retour à la position d'équilibre le plus bas possible sans oscillation.
On sélectionne un amortisseur dont la distance $y(t)$ du châssis par rapport au sol exprimée en millimètres, vérifie l'équation différentielle :

$$(F)~:\qquad y'' + 40y' + 400y = 100\,000$$

où y est une fonction de la variable t, définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, y' sa fonction dérivée, y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle sans second membre

$$(F_0)~:\qquad y'' - 40y' + 400y = 0.$$

2. Montrer que la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = 250$ est une solution de (F).

3. En déduire l'ensemble des solutions de (F).

4. Déterminer la solution h de (F) vérifiant les conditions initiales $h(0) = 100$ et $h'(0) = 0$.

5. On considère la fonction h définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$h(t) = (-3\,000t - 150)\text{e}^{-20t} + 250.$$

a. Démontrer que pour tout réel de $[0~;~+\infty[$, $h'(t) = 60\,000t\text{e}^{-20t}$.

b. Étudier les variations de h.

6. a. Compléter le tableau de valeurs sur l'**annexe 2, à rendre avec la copie** (les valeurs seront arrondies au dixième).

   b. Construire la courbe représentative Γ de h sur le même graphique que $\mathscr{C}_f$ sur l'**annexe 2, à rendre avec la copie**.

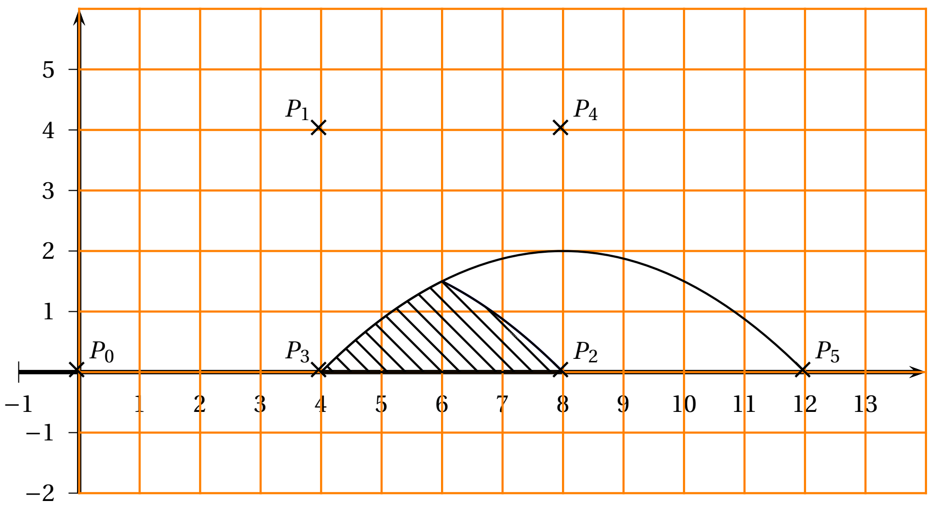
   L'objectif est-il atteint ?

Annexe 1 à rendre avec la copie

Exercice 1 : Partie A question 4. a.

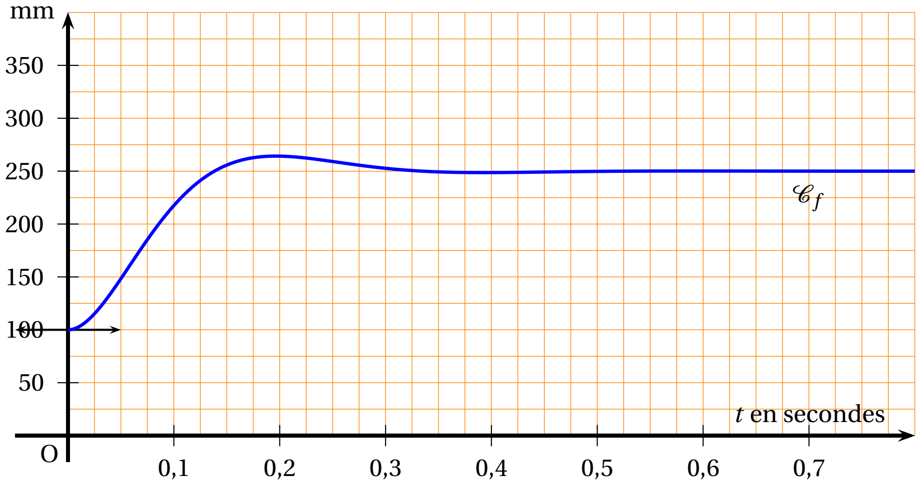
t	0	0,2	0,4	0,6	0,75	0,8	0,9	1
$x_1(t)$								
$y_1(t)$								

Figure à compléter (Partie A questions 1. et 4. b.)



Annexe 2 à rendre avec la copie

Exercice 3 : Partie A représentation graphique de la fonction f



Partie B
Question 6. a.

t	0,05	0,1	0,15	0,20	0,3	0,35	0,4	0,45
$h(t)$								