∽ Brevet de technicien supérieur ∾
Comptabilité et gestion des organisations session 2005

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendants.

Une entreprise fabrique en grande quantité des sacs poubelle.

A. Probabilités conditionnelles

On admet que 3 % des sacs de la production présentent un défaut.
On contrôle les sacs d'un lot. Ce contrôle refuse 94 % des sacs avec défaut et accepte 92 % des sacs sans défaut.
On prélève un sac au hasard dans le lot.
On considère les évènements suivants :

D : « le sac a un défaut » ;
A : « le sac est accepté à l'issue du contrôle ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé :
   $P(D)$, $P_D\left(\overline{A}\right)$, et $P_{\overline{D}}(A)$.
   (On rappelle que $P_D\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A}/D\right)$ est la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement D est réalisé).
2. **a.** Déterminer $P_D(A)$.
   b. Calculer $P(A \cap D)$ et $P\left(A \cap \overline{D}\right)$.
3. Déduire de ce qui précède $P(A)$.
4. Calculer la probabilité qu'un sac soit défectueux sachant qu'il a été accepté par le contrôle. Arrondir à 10^{-3}.

Dans les parties B et C, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

B. Loi binomiale

On note E l'évènement : « Un sac prélevé au hasard dans une grosse livraison pour une municipalité n'a pas de défaut ».
On suppose que la probabilité de E est $0,97$.
On prélève au hasard 10 sacs de cette livraison pour vérification. La livraison est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 sacs.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 sacs, associe le nombre de sacs sans défaut de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, tous les sacs soient sans défaut.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, exactement 9 sacs soient sans défaut
4. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins 9 sacs soient sans défaut.

C. Loi normale

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque sac prélevé au hasard dans la production, associe la masse maximale, en kilogrammes, qu'il peut supporter sans se déchirer. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 5 et d'écart type 0,4.

1. Calculer $P(46 \leqslant Y \leqslant 5,4)$.
2. Déterminer le nombre réel positif h tel que :
   $P(v \leqslant 5 + h) = 0,95$.
   Interpréter le résultat obtenu à l'aide d'une phrase.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,7]$ par

$$f(x) = 100 + 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}.$$

1. **a.** Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,7]$, $f'(x) = 0,01(x-6)\mathrm{e}^{x}$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[1\,;\,7]$.
   c. Établir le tableau de variations de f sur $[1\,;\,7]$.
2. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-1}.

x	1	2	3	4	5	6	6,5	7
$f(x)$								

   b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm. Faire la figure dans un repère orthonormal où la graduation commence à zéro sur l'axe des abscisses et commence à 95 sur l'axe des ordonnées.
   c. Résoudre graphiquement dans $[1\,;\,7]$ l'équation $f(x) = 97$. On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_1^7 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $I = 0,01\left(7\mathrm{e} - \mathrm{e}^7\right)$.
2. On note $J = \displaystyle\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   En utilisant le résultat du **1.**, démontrer que $J = 600 + 0,01\left(7\mathrm{e} - \mathrm{e}^7\right)$.

C. Application des résultats des parties A et B

Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 1 et 7 tonnes de produit chimique.
On admet que, lorsque x tonnes de ce produit sont fabriquées, $1 \leqslant x \leqslant 7$, le coût moyen de fabrication d'une tonne de produit est, en euros :

$$f(x) = 100 + 0,01(x-7)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Déterminer la quantité de produit à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen. Arrondir à l'euro.
2. Déduire de la partie B la valeur moyenne de $f(x)$ lorsque x varie dans $[1\,;\,7]$. Arrondir à l'euro.
3. Quelle(s) quantité(s) de produit faut-il fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une tonne de produit soit de 97 euros ?