∽ Brevet de technicien supérieur session 2009 ∾
Comptabilité et gestion des organisations Polynésie

Exercice 1 **9 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

A. Loi binomiale et loi normale

Dans cette partie, sauf mention particulière, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}

Dans le cadre de la lutte contre l'obésité et le diabète, on a testé un nouveau régime. Les patients sont suivis durant quatre ans. Si au terme de ces quatre ans, le poids est stabilisé à une valeur satisfaisante, le régime est considéré comme un succès.

Quatre ans après le début de l'étude, on considère le fichier constitué par les dossiers d'un grand nombre de patients ayant suivi le régime.
On note E l'évènement : « un dossier prélevé au hasard dans le fichier est celui d'un patient ayant suivi le régime avec succès ».
On suppose que $p(E) = 0,375$.
On prélève au hasard 100 dossiers médicaux dans le fichier. Le nombre de dossiers dans le fichier est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 dossiers.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de dossiers correspondant à des patients ayant suivi le régime avec succès.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b. Calculer la probabilité que 25 dossiers de ce prélèvement correspondent à des patients ayant suivi le régime avec succès.
   Pour ce calcul on peut prendre $\mathrm{C}_{100}^{25} \approx 2,425 \times 10^{23}$.

2. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 37,5 et d'écart type 4,8.

   On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 37,5 et d'écart type 4,8.

   a. Justifier les valeurs des paramètres de cette loi normale (4,8 est une valeur approchée à 10^{-1}).

   b. Calculer la probabilité qu'au moins la moitié des dossiers prélevés correspondent à des patients ayant suivi le régime avec succès, c'est-à-dire calculer $P(Y \geqslant 49,5)$.

B. Probabilités conditionnelles

Dans un département, on dispose des informations suivantes sur l'effet de deux types de régime.
70 % des patients de ce département ont suivi le régime de type 1 et 30 % ont suivi un régime de type 2.
Parmi les patients ayant suivi le régime de type 1,30 % seulement l'ont suivi avec succès, alors qu'il y a 55 % de réussite pour les patients ayant suivi le régime de type 2.
On prélève un dossier au hasard dans l'ensemble des dossiers des patients de ce département. On considère les évènements suivants :

— A : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi le régime de type 1 » ;

— B : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi le régime de type 2 » ;
— R : « Le dossier prélevé est celui d'un patient qui a suivi un des deux régimes avec succès ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(R)$ et $P_B(R)$.
(On rappelle que $P_A(R) = P(R/A)$ est la probabilité de l'évènement R sachant que l'évènement A est réalisé.)

2. **a.** Calculer $P(R \cap A)$ et $P(R \cap B)$.
b. En déduire $P(R)$.

3. Calculer la probabilité qu'un patient qui a suivi un des deux régimes avec succès, ait suivi le régime de type 2.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3,87\mathrm{e}^{-0,26x} + 0,76.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On prendra comme unités : 1 cm sur l'axe des : abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,26x} = 0$; en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
b. Déduire du a. que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
c. Établir le tableau de variations de f sur $[0\,;\,+\infty[[$.

3. Compléter, après l'avoir reproduit sur votre copie le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	5	7	9	12	15
$f(x)$	3,74						0,93	

4. Construire la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$ sur une feuille de papier millimétré.

5. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.
b. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 1$. Donner la valeur exacte de la solution.

6. **a.** On note $I = \displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Démontrer que $I = \dfrac{387}{26}\left(1 - \mathrm{e}^{-2,6}\right) + 7,6$.
b. Donner la valeur approchée de I arrondie à 10^{-2}.

B. Application

Dans le cadre d'études sur la gestion des ressources naturelles dans un pays en voie de développement, on s'intéresse à la quantité de bois de chauffe, en kilogrammes, consommée quotidiennement par personne, pendant la saison sèche.
On admet que la quantité de bois de chauffe consommée quotidiennement par une personne vivant dans une exploitation abritant x personnes est $f(x)$ kilogrammes, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déduire de la partie A le nombre de personnes vivant dans une exploitation où la consommation de bois de chauffe quotidienne pour une personne est de 1 kilogramme.
2. Calculer la consommation quotidienne totale en kilogrammes d'une exploitation où vivent 12 personnes. Arrondir à l'unité.