Brevet de technicien supérieur Polynésie
Comptabilité et gestion des organisations session 2005

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Une PME fabrique des boules de billard.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}

A. Loi normale

Le diamètre des boules est exprimé en millimètres.
Une boule est dite « de premier choix » si son diamètre appartient à l'intervalle [61 ; 61,5], sinon, elle est dite « de deuxième choix ».
On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne $61,25$ et d'écart type $0,2$.

1. Calculer la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de premier choix.
2. En déduire la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de second choix.
3. Calculer $P(X \geqslant 61,5)$.

B. Loi binomiale

Dans un stock de boules, 67 % des boules sont blanches et le reste est rouge.
On prélève au hasard 15 boules de ce stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 boules.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 boules, associe le nombre de boules blanches parmi les 15 boules.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait exactement 10 boules blanches.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait, au plus, 13 boules blanches.

C. Événements indépendants

On prélève une boule au hasard dans un lot important.
On note A l'évènement « la boule est de deuxième choix ».
On note B l'évènement « la boule est blanche ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,21$ et $P(B) = 0,67$. On suppose de plus que ces deux évènements sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l' évènement E_1 : « la boule est de deuxième choix et elle est blanche ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 : « la boule est de deuxième choix ou elle est blanche ».

3. On rappelle que si une boule n'est pas de deuxième choix, elle est de premier choix et que les boules sont, soit blanches, soit rouges.

Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « la boule est de premier choix et elle est rouge ».

On admet que si les évènements A et B sont indépendants, alors les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 2 **11 points**

A. Étude d'une fonction logistique

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{12}{1+3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Démontrer que, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{18\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{\left(1+3\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)^2}.$$

b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

c. Établir le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0.

b. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à $1O^{-1}$.

t	0	1	2	4	5	8	10
$f(t)$							

c. Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 10$.

On fera apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Calcul intégral

1. **a.** Vérifier que, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{12\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+3}$.

b. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $F(t) = 24\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}+3\right)$.

Démontrer que F est une primitive de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. **a.** Démontrer que la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,10]$ est :

$$V_m = 2,4\ln\left(\frac{\mathrm{e}^5+3}{4}\right).$$

b. Donner la valeur approchée, arrondie à 10^{-2}, de V_m.

C. Application économique

On admet que dans une entreprise fabriquant des accessoires pour la téléphonie mobile, la production d'un certain matériel depuis 1993, est donnée, en milliers d'exemplaires, par $f(t)$.
Par exemple $f(0) = 3$ se traduit par : « en 1993, il a été fabriqué 3 000 exemplaires du matériel considéré ».

1. Déduire de la partie A. une valeur approchée de la production de ce matériel en 2001.
2. Déduire de la partie A., l'année au cours de laquelle la production a dépassé 10 milliers d'exemplaires.
3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat de la question 2. b. de la partie B.