Corrigé du brevet de technicien supérieur Comptabilité et gestion des organisations Nouvelle–Calédonie session 2010

Exercice 1 **10 points**

A. Étude d'une fonction

1. **a.** f est dérivable pour $x > 0$, donc sur [1 ; 100] et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{0,02x\text{e}^{0,02x+0,28} - \text{e}^{0,02x+0,28}}{x^2} = \dfrac{\text{e}^{0,02x+0,28}}{x^2}(0,02x-1)$.

   b. Comme $\text{e}^{0,02x+0,28} > 0$ et $x^2 > 0$, quel que soit le réel $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $0,02x - 1$.
Or $0,02x - 1 > 0 \iff 0,02x > 1 \iff x > 50$. De même $0,02x - 1 < 0 \iff 0,02x < 1 \iff x < 50$.
Conclusion : sur $[1\,;\,50[$, $f'(x) < 0$ et sur $]50\,;\,100]$, $f'(x) > 0$.

2. On en déduit le tableau de variations suivant avec $f(1) = \dfrac{\text{e}^{0,02+0,28}}{1} = \text{e}^{0,3}$, $f(50) = \dfrac{\text{e}^{0,02\times 50+0,28}}{50} = \dfrac{\text{e}^{1,28}}{50}$, $f(100) = \dfrac{\text{e}^{0,02\times 100+0,28}}{100} = \dfrac{\text{e}^{2,28}}{100}$.

x	1		50		100
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\text{e}^{0,3}$	$\searrow$	$\dfrac{\text{e}^{1,28}}{50}$	$\nearrow$	$\dfrac{\text{e}^{2,28}}{100}$

3.

x	1	5	10	20	50	80	100
$f(x)$	1,35	0,29	0,16	0,10	0,07	0,08	0,10

4. Voir à la fin.

5. On trace la droite d'équation $y = 0,3$ qui coupe la courbe $\mathscr{C}$ en un point dont on trouve l'abscisse en le projetant sur l'axe des abscisses. On lit à peu près : 0,5. L'ensemble solution est donc $[0,5\ ;\ 100]$.

B. Calcul intégral

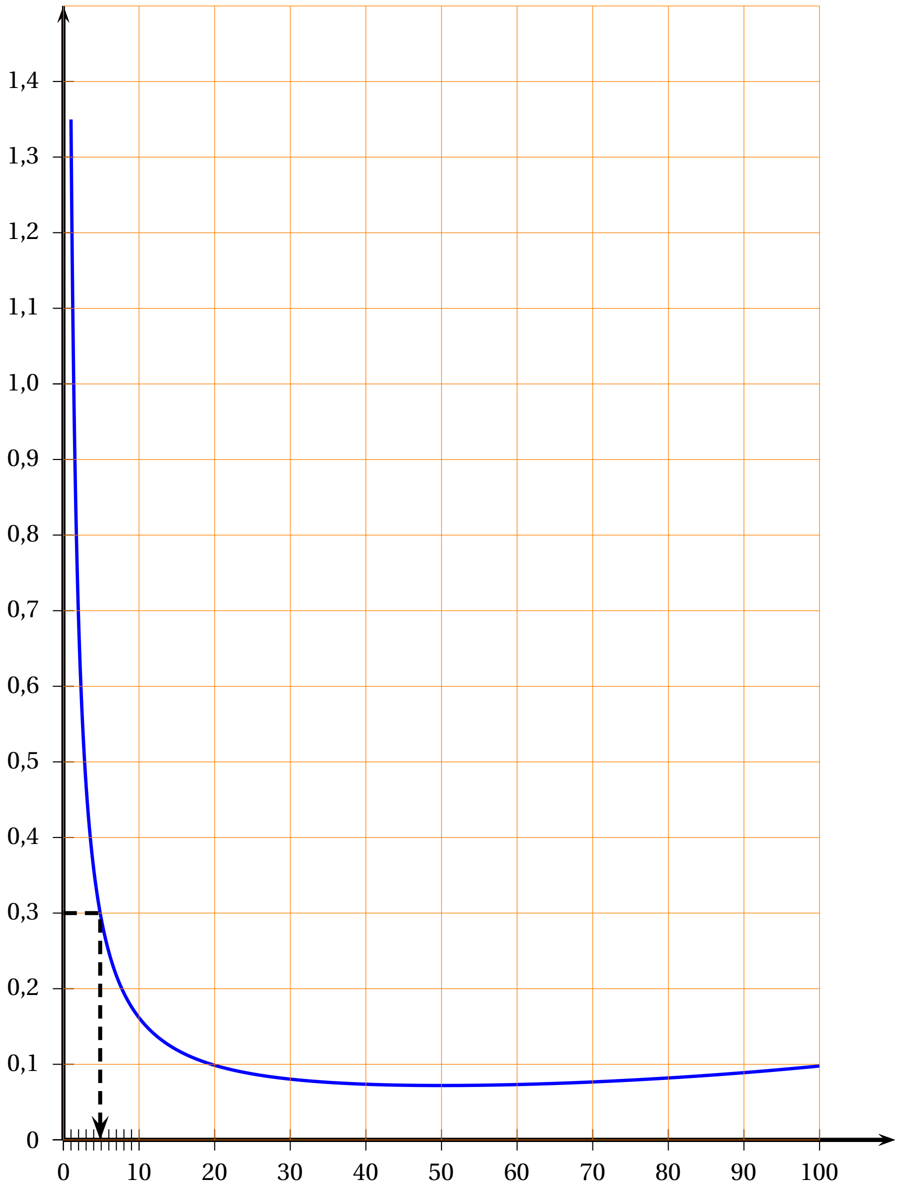
1. $I = \displaystyle\int_1^{100} \left[10\text{e}^{0,02x+0,28}\right]\text{d}x = \left[\frac{10}{0,02}\text{e}^{0,02x+0,28}\right]_1^{100} = \left[500\text{e}^{0,02x+0,28}\right]_1^{100} = 500\text{e}^{0,02\times 100+0,28} - 500\text{e}^{0,02\times 1+0,28} = 500\text{e}^{2,28} - 500\text{e}^{0,3} = 500\left(\text{e}^{2,28} - \text{e}^{0,3}\right)$.

2. En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle [1 ; 100]. On a $m_g = \dfrac{1}{100-1}\displaystyle\int_1^{100} g(x)\text{d}x = \frac{10}{99}\int_1^{100} \text{e}^{0,02x+0,28} = \frac{10}{0,02\times 99}\left[\text{e}^{0,02x+0,28}\right]_1^{100} = \frac{500}{99}\left(\text{e}^{2,28} - \text{e}^{0,3}\right)$.
Donc $m_g \approx 42,56$.

C. Application des parties A et B

1. Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $\dfrac{f(x)}{10} \leqslant 0,30 \iff \dfrac{\mathrm{e}^{0,02x+0,28}}{x} \leqslant 0,3.$
   Or on a résolu cette inéquation dans la partie A et les nombres solutions sont les nombres supérieurs à 49, donc entre 50 et 1 000 articles.
2. **a.** Puisque $f(x)$ représente le coût de production, en euros, d'un article en fonction du nombre x de dizaines d'articles fabriqués, le coût total de production de x dizaines d'objets est égal à $10x \times f(x) = 10\mathrm{e}^{0,02x+0,28} = g(x)$.

   b. m_g représente donc le coût moyen total de production, cette production variant de 10 à 1 000 articles.



Exercice 2 **10 points**

A. Loi binomiale

1. Le stock étant important, les tirages sont indépendants ; X est donc la variable aléatoire d'une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,08$.

2. $p(X=4) = \binom{25}{4} 0,08^4(1-0,08)^{25-4} \approx 0,09$.
3. $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \binom{25}{0} 0,08^0 \times 0,92^2 5 \approx 0,88$.
4. **a.** On a $\text{E}(X) = np = 25 \times 0,08 = 2$.

   b. Le montant moyen est égal à $\text{E}(X) \times 30 = 2 \times 30 = 60$ €.

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

1. On approche la loi binomiale par la loi normale de même espérance $np = 50 \times 0,45 = 22,5$, d'où le choix de la moyenne et de même variance $np(1-p) = 50 \times 0,45 \times 0,55 = 12,375$. Or $\sqrt{12,375} \approx 3,5$, d'où le choix de l'écart type.
2. On pose $C = \dfrac{Z - 22,5}{3,5}$. C suit une loi normal centrée réduite N$(0\,;\,1)$ et $Z = 3,5C + 22,5$.
   Donc $p(Z < 24,5) = p(3,5C + 22,5 < 24,5) = p\left(C < \frac{4}{7}\right) = \Pi\left(\frac{4}{7}\right) \approx 0,71$.
   Finalement $P(Z \geqslant 24,5) \approx 0,29$.

C. Probabilités conditionnelles

1. $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P_A(E) = 0,5$ et $P_B(E) = 0,37$.
2. $P(A \cap E) = P_A(E) \times P(A) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$;
   $P(B \cap E) = P_B(E) \times P(B) = 0,37 \times 0,4 = 0,128$;
   D'après la loi des probabilités totale :
   $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = 0,3 + 0,128 = 0,428$.
3. La probabilité cherchée est $P_E(A) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(E)} = \dfrac{0,3}{0,428} \approx 0,70$.