Brevet de technicien supérieur session 2009
Métropole Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendants.

Une entreprise réalise et commercialise des compositions florales ainsi que des produits pour le jardin.

A. Évènements indépendants

Dans cette partie, on demande les valeurs exactes des probabilités

L'entreprise confectionne ses compositions florales avec des bulbes de fleurs qu'elle reçoit en grande quantité. Chaque bulbe peut présenter deux défauts que l'on désigne par défaut a et défaut b.
On prélève un bulbe au hasard dans un stock important.
On note A l'évènement : « le bulbe présente le défaut a » et on note B l'évènement : « le bulbe présente le défaut b ».
On admet que les probabilités des évènements A et B sont $P(A) = 0,015$ et $P(B) = 0,02$. On suppose que les deux événements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité de l'évènement E_1 : « le bulbe présente le défaut a et le défaut b ».
2. Calculer la probabilité de l'évènement E_2 ; « le bulbe présente au moins un des deux défauts ».
3. Calculer la probabilité de l'évènement E_3 : « le bulbe ne présente aucun des deux défauts ».

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à10^{-2}.

B. Loi binomiale

On s'intéresse à une livraison importante de compositions florales d'un certain type, destinée à une chaine d'hypermarchés.
On note D l'évènement : « une composition florale prélevée au hasard dans la livraison est défectueuse ».
On suppose que $P(D) = 0,025$.
On prélève au hasard 12 compositions dans la livraison pour vérification. La livraison contient assez de compositions pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 12 compositions.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de compositions de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement il y ait exactement deux compositions défectueuses.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait au plus une composition défectueuse.

C. Loi normale et somme de variables indépendantes

L'entreprise commercialise deux types d'engrais : le type C_1 en poudre, et le type C_2 en granulés.

1. On note X_1, la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_1, pour cette semaine.

   On suppose que la variable aléatoire X_1, suit la loi normale de moyenne 160 et d'écart type 32.

   Calculer $P\left(X_1 \leqslant 200\right)$.

2. On note X_2, la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande en kilogrammes d'engrais de type C_2, pour cette semaine.

   On suppose que la variable aléatoire X_2, suit la loi normale de moyenne 77 et d'écart type 28.

   On note Y la variable aléatoire qui, à toute semaine prise au hasard pendant une année associe la demande totale en kilogrammes d'engrais de type C_1, et de type C_2, pour cette semaine.

   On a $Y = X_1 + X_2$.

   On suppose que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On admet que Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type a.

   a. Justifier que $m = 237$ et qu'une valeur approchée de a arrondie à 10^{-2}, est 42,52.

   b. Calculer la probabilité $P(Y \geqslant 340)$.

   c. Le coût de stockage de cet engrais est élevé. L'entreprise a-t-elle raison de limiter Ia production totale hebdomadaire de cet engrais à 340 kilogrammes ?

Exercice 2 **10 points**

A. Résolution graphique d'une inéquation

Soit f la fonction définie sur [1 ; 10] par

$$f(x) = \frac{10}{\ln(2x+3)}$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée sur l'annexe à rendre avec la copie.

Résoudre graphiquement dans [1 ; 10] I'inéquation $f(x) \leqslant 3,5$. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur [0 ; 10J par

$$g(x) = 5 - \mathrm{e}^{-0,2x+1}$$

1. **a.** Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de [1 ; 10].

   b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur [1 ; 10],

2. Donner la tableau de variation de g sur [1 ; 10],

3. **a.** Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à 10^{-2}.

x	1	2	3	4	5	6	8	10
$g(x)$				3,78	4			

   b. Tracer la courbe représentative Γ de g sur l'annexe à rendre avec la copie, dans le même repère que la courbe $\mathscr{C}$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A. Faire apparaître sur la figure les constructions utiles.

C. Calcul intégral

1. Soit G la fonction définie sur $[1\ ;\ 10]$ par

$$G(x) = 5x + 5\mathrm{e}^{-0,2x+1}.$$

Démontrer que la fonction G est une primitive sur $[1\ ;\ 10]$ de la fonction g définie au début de la partie B.

2. a. Démontrer que la valeur moyenne de la fonction g sur $[1\ ;\ 10]$ est :

$$V_m = \frac{45 + 5\mathrm{e}^{-1} - 5\mathrm{e}^{0,8}}{9}.$$

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V_m.

D. Application des parties A et B

On considère un produit dont le prix de la tonne, exprimé en dizaines d'euros, est noté x.
La **demande**, $d(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes que les consommateurs sont prêts à acheter au prix de x dizaines d'euros la tonne.
L'offre, $o(x)$ est la quantité de ce produit, exprimée en milliers de tonnes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix de x dizaines d'euros la tonne.
On appelle **prix d'équilibre** de ce produit le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
On admet que, pour un prix du produit de x dizaines d'euros la tonne, avec
$1 \leqslant x \leqslant 10$, la demande est $d(x) = f(x)$ et l'offre est $o(x) = g(x)$, où f et g sont les fonctions définies dans les parties A et B.

1. En utilisant un résultat de la partie A ou de la partie B, indiquer à partir de quel prix de la tonne en euros, la demande est inférieure ou égale à 3 500 tonnes.

2. a. Déduire d'un résultat de la partie B une valeur approchée du prix d'équilibre en euros.

b. Donner une valeur approchée de la demande correspondant au prix d'équilibre.

Annexe

Exercice 2