Brevet de technicien supérieur session 2011 Métropole Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes
Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique).

A. Évènements indépendants, probabilités conditionnelles

Le grossiste reçoit ces sachets en grande quantité.
Chaque sachet peut présenter deux défauts notés respectivement « a » et « b ».
Le défaut « a » consiste en la présence de désherbants chimiques.
Le défaut « b » consiste en la présence de pesticides.
On prélève un sachet au hasard dans une importante livraison.
L'évènement « le sachet présente le défaut « a » est noté A et l'évènement « le sachet présente le défaut « b » est noté B.
Des études statistiques ont permis d'établir que $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,03$. On suppose que ces deux évènements sont indépendants.

1. On note E_1 l'évènement : « le sachet présente les deux défauts « a » et « b » ».
   Calculer $P(E_1)$.
2. On dit qu'un sachet est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts.
   On note E_2 l'évènement : « le sachet est défectueux ».
   Calculer $P(E_2)$.
3. On note E_3 l'évènement : « le sachet ne présente aucun défaut ».
   Calculer $P(E_3)$.
4. Calculer la probabilité que le sachet présente les deux défauts sachant qu'il est défectueux.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-4}.

Dans tout ce qui suit, les probabilités sont à arrondir à 10^{-4}

B. Loi binomiale

On note D l'évènement « un sachet prélevé dans un stock important est défectueux ».
On suppose que $P(D) = 0,05$.
On prélève au hasard 40 sachets pour vérification, le stock étant assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui à tout prélèvement de 40 sachets associe le nombre de sachets défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait exactement 2 sachets défectueux.
3. Calculer la probabilité pour que dans un tel prélèvement, il y ait au moins un sachet défectueux.

C. Loi normale

On s'intéresse dorénavant à la masse d'un sachet.
La variable aléatoire Y qui à chaque sachet associe sa masse en grammes est notée Y.
On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 120 et d'écart-type 8.

1. Calculer $P(Y \geqslant 104)$.

2. Un sachet dont la masse en grammes n'est pas dans l'intervalle [104 ; 136J est rejeté. Calculer la probabilité qu'un sachet soit rejeté.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+4,9\text{e}^{-0,125t}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. On admet que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \text{e}^{-0,125t} = 0$. Calculer la limite de f en $+\infty$.
En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote D dont on donnera une équation.

2. Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à 10^{-2}.

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$							

3. a. Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(t) = \dfrac{0,6125\text{e}^{-0,125t}}{\left(1+4,9\text{e}^{-0,125t}\right)^2}$.

b. Établir le tableau de variations de f.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite D.

5. Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0,5$. Faire apparaître les traits utiles sur le graphique.

B. Valeur moyenne

1. On admet que $f(t) = \dfrac{\text{e}^{0,125t}}{4,9+\text{e}^{0,125t}}$.
Vérifier que la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(t) = 8\ln\left(4,9+\text{e}^{0,125t}\right)$ est une primitive de f.

2. Démontrer que la valeur moyenne de f sur [10 ; 20] est : $\text{V}_m = 0,8\ln\left(\dfrac{4,9+\text{e}^{2,5}}{4,9+\text{e}^{1,25}}\right)$.

3. Donner une valeur approchée de V_m à 10^{-3} près.

C. Applications des parties A et B

Une étude statistique a établi qu'à partir de l'année 1990, le pourcentage des ménages équipés d'un four à micro-ondes, dans un département, est donné approximativement par la formule :

$f(t) = \dfrac{1}{1+4,9\text{e}^{-0,125t}}$ où t désigne le nombre d'années écoulées depuis 1990.

Par exemple $f(0) \approx 0,17$; en 1990 il y avait 17 % des ménages équipés d'un four à micro-ondes.

1. Calculer le pourcentage des ménages ayant cet équipement en 2010.
Le résultat sera arrondi à 10^{-2}

2. Déduire de la partie A., l'année à partir de laquelle 50 % des ménages sont équipés d'un four à micro-ondes.

3. À l'aide d'une phrase, interpréter le résultat obtenu au 3. de la partie B.