Brevet de technicien supérieur
Comptabilité et gestion des organisations session 2003
Nouvelle Calédonie octobre 2002

Exercice 1

Partie A : étude mathématique

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle [1 ; 6] respectivement par :

$$f(t) = 6 - \frac{9}{t+2} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{21}{5+\mathrm{e}^{-0,8t}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans le plan muni du repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques : 2 cm pour 1 unité en abscisse, et 10 cm pour 1 unité en ordonnée.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ; 6]. En déduire le sens de variation de f.
2. **a.** Démontrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ; 6],
   $g'(t) = \dfrac{16,8\mathrm{e}^{-0,8t}}{\left(5+\mathrm{e}^{-0,8t}\right)^2}$.

   b. En déduire le sens de variations de g.
3. Sur la feuille donnée en annexe, compléter le tableau de valeurs de f et g (les valeurs de $f(t)$ et $g(t)$ seront arrondies à 10^{-2}).
   Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Résoudre algébriquement l'inéquation $g(t) \geqslant 4,15$. On donnera la valeur arrondie à 10^{-2} près de la borne inférieure de l'intervalle des solutions.
5. **a.** Donner une primitive de f sur l'intervalle [1 ; 6] .

   b. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle [1 ; 6], $g(t) = \dfrac{21\mathrm{e}^{0,8t}}{5\mathrm{e}^{0,8t}+1}$.
   En déduire une primitive de g sur l'intervalle [1 ; 6].

   c. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 f(t)\,\mathrm{d}t$. ri,

   d. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_1^6 g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie B : utilisation de certains résultats pour une étude économique

Un groupe distribuant une marque d'un certain produit lance un plan de réorganisation de l'implantation des points de vente de cette marque sur une période de 6 ans. Ce plan entraîne pendant cette période d'une part, des fermetures de points de vente et d'autre part, des ouvertures de nouveaux points de vente.

Une étude a montré que f modélise le nombre, exprimé en centaines, d'ouvertures et g le nombre, exprimé en centaines, de fermetures de points de vente.
Ainsi, $f(1)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 1re année,
$f(2)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la 2e année,
$f(t)$ représente le nombre d'ouvertures au cours de la te année ($1 \leqslant t \leqslant 6$).
De même, $g(t)$ représente le nombre de fermetures au cours de la te année
($1 \leqslant t \leqslant 6$).

1. L'année précédant le lancement du plan, 4 150 points de vente étaient implantés en France.

   Déterminer graphiquement, au cours de quelle année le nombre de points de vente fermés dans l'année dépasse 10 % de l'effectif initial.

   On fera figurer sur le graphique les traits de construction utiles.
2. Déterminer graphiquement, l'année au cours de laquelle le nombre de points de vente ouverts devient supérieur au nombre de points de vente fermés.
3. Expliquer comment on pourrait obtenir le nombre total de points de vente de la marque à la fin du plan de réorganisation.

Exercice 2

Un éditeur scolaire produit en grande série un CD-Rom de sujets d'examens de mathématiques corrigés, à l'intention des étudiants des sections de techniciens supérieurs. Au cours de la fabrication de ce produit, deux défauts peuvent se produire :

— le défaut a au cours de l'impression de la jaquette ;

— le défaut b au cours de l'enregistrement des données.

Les trois parties A. B et C peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

On noté A l'évènement « le CD-Rom présente le défaut a ». Une étude a montré que $p(A) = 0,08$.

1. On prélève au hasard successivement 50 CD-Roms dans le stock On admet que le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 CD-Roms.

   On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 CD-Roms, associe le nombre de CD-Roms présentant le défaut a.

   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. En déterminer les paramètres.

   b. Calculer les probabilités, arrondies à 10^{-2} près, des événements suivants :

   — « parmi les 50 CD-Roms, exactement cinq présentent le défaut a ».

   — « parmi les 50 CD-Roms, deux au moins présentent le défaut a ».
2. Le prix de vente unitaire prévu d'un CD-Rom est 18 euros. L'éditeur effectue une réduction de 15 % sur le prix de vente prévu pour les CD-Roms présentant le défaut a.

   a. Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

   b. Déduire de la question a. la recette moyenne, arrondie à un euro, que l'éditeur peut espérer de la vente de 50 CD-Roms.

Partie B

Dans cette partie, les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*

Les CD-Roms présentant le défaut b sont considérés comme défectueux. Lorsqu'un client se trouve en possession d'un CD-Rom défectueux, il doit le renvoyer au service après-vente de l'éditeur qui en échange, lui fait parvenir un autre CD-Rom en remplacement.

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque client concerné prélevé au hasard, associe le nombre de jours séparant la date de renvoi du CD-Rom défectueux au service après-vente et la date de réception du CD-Rom de remplacement.

On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart type 2,75.

On admet qu'un client se déclare satisfait par le service après-vente si son délai d'attente ne dépasse pas 10 jours et mécontent si ce délai dépasse 14 jours.

1. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit satisfait du service après-vente.

2. Calculer la probabilité qu'un client concerné soit mécontent du service après-vente.

Partie C

L'éditeur met en place des services après-vente décentralisés.
Dans cette partie, on s'intéresse à un service après-vente donné.
Les résultats seront donnés à 10^{-2} *près*

Pendant une période donnée, on a relevé le délai d'attente, en jours, de chaque client de ce service après-vente.
Pour un échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, on constate que la moyenne des délais d'attente est $\overline{x} = 9$ et que l'écart-type s des délais d'attente est $s = 2,80$.

1. À partir des informations portant sur cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne μ et de l'écart type σ des délais d'attente de l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée.

2. Soit $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 clients prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble des clients de ce service pendant la période considérée, associe la moyenne des délais d'attente, en jours, des clients de ce service.

On suppose que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$. On prendra pour σ l'estimation ponctuelle fournie à partir de l'échantillon de la question 1.

a. Déterminer un intervalle de confiance centré en 9 de la moyenne μ des délais d'attente des clients de ce service avec le coefficient de confiance 95 %.

b. Ce service peut-il affirmer que la moyenne des délais d'attente ne dépasse pas 10 jours ? Justifier la réponse.

ANNEXE à rendre avec la copie

Tableau de valeurs à compléter :

t	1	2	3	4	5	6
$f(t)$						
$g(t)$