Brevet de technicien supérieur session 2005 - Assistant en création industrielle

Exercice 1 **7 points**

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$.
2. Soit $P(z) = z^3 - 8z^2 + 32z - 64$.
   a. Vérifier que $P(z)=(z-4)\left(z^2 - 4z + 16\right)$.
   b. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm)
   On considère les nombres complexes :
   $$z_{\text{A}} = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\text{B}} = 4\ ;\ z_{\text{C}} = 2 + 2\text{i}\sqrt{3}.$$
   a. Montrer que les points A, B et C, d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C} sont sur un même cercle Γ de centre O dont on précisera le rayon.
   b. Tracer Γ et placer les points A, B et C.
   c. Déterminer le longueurs AB et BC.
   d. Déduire de ce qui précède, et en le justifiant, la nature du quadrilatère OABC.

Exercice 2 **13 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

1. Donner les limites en 0 et $+\infty$ de la fonction f.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
3. Donner le tableau de variations de la fonction f.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur $[0,5\ ;\ 8]$.
   a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
   b. Tracer la courbe dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ [unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées].
5. Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à $[\text{O}x)$.

Partie B

On met à la fabrication des vases dont le profil est représenté par l'ensemble des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On veut tester la qualité de ces vases et à cet effet on prélève 100 lots de même taille et on compte les vases défectueux dans chacun de ces lots. On obtient le tableau suivant :

Nombre de vases défectueux par lot	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de lots	7	13	18	23	21	11	6	1

1. Déterminer la moyenne μ et l'écart-type σ de cette série statistique.
Les résultats seront donnés arrondis au dixième.
On rappelle les formules donnant l'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{p} n_i\left(x_i - \mu\right)^2} \text{ où } \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{1}^{p} n_i x_i^2 - \mu^2} \text{ avec } n = \sum_{1}^{p} n_i.$$

2. En admettant que le nombre de vases défectueux dans les lots suit la loi normale de moyenne 3 et d'écart-type $1,6$, déterminer la probabilité pour qu'un lot quelconque contienne au plus 5 vases défectueux.