Corrigé de l'épreuve de mathématiques BTS 2014 groupement C

Mohamed Hassnaoui
UPO lyon

30 octobre 2014

Exercice 1

Partie 1

Résolution de l'équation différentielle : (E) : $y' + 0,175y = 8,365$

(E_0) : $y' + 0,175y = 0$ est une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficients constants, donc les solutions de (E_0) sont de la forme : $\boxed{y_0 = \mu e^{-0,175x}}$ où μ est un réel quelconque et $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

La fonction g, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = a$, est une solution particulière de l'équation (E) si et seulement si, $g'(x) + 0,175g(x) = 8,365$, comme $g'(x) = 0$, on a immédiatement $a = \dfrac{8,365}{0,175}$, donc $\boxed{g(x) = 47,8}$ pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme : $y = y_0 + g(x)$, soit $\boxed{y = \mu e^{-0,175x} + 47,8}$, $x \in [0\ ;\ +\infty[$.

La fonction p, solution de l'équation différentielle (E), est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $\mu e^{-0,175x} + 47,8$ comme $p(0) = 0$, $\mu = -47,8$, donc $\boxed{p(x) = 47,8(1 - e^{-0,175x})}$

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 47,8\left(1 - e^{-0,175x}\right)$.

Etude théorique.

Par définition, la fonction f est la pression exercée sur le fond du silo en fonction de la hauteur x. Plus il y a des grains plus la pression augmente donc la fonction f ne peut être que croissante.

$f'(x) = 47,8(0 - (-0,175)e^{-0,175x}) = 8,365e^{-0,175x}$. On sait que pour tout réel t, $e^t > 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, par conséquent la fonction f est srictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,175x} = 0$, on en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 47,8$. Donc la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f admet, en $+\infty$, une asymptote horizontale $\mathscr{D}$ d'équation $\boxed{y = 47,8}$

λ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente (T) en 0 et de l'asymptote $\mathscr{D}$

Graphiquement, on peut observer que l'effet de voûte se réalise sur l'intervalle $[5\ ;\ 6]$ (voir graphique ci-dessous), on a donc $\boxed{5 < \lambda < 6}$

La tangente de T, à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, a pour équation :$y = f'(0)x + f(0)$. Comme $f'(0) = 8,365$ et $f(0) = 0$. Une équation de (T) est donc : $\boxed{y = 8,365x}$

λ est la solution de l'équation $8,365x = 47,8$. D'où $\boxed{\lambda \simeq 5,71}$

Partie 3

La pression moyenne, p_m, exercée sur le fond du silo par une quantité de grains d'une hauteur variant entre 0 et 5 mètres est définie par :
$p_m = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

On rappelle qu'une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$, avec $a \neq 0$ est :$x \mapsto \dfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax}$. Donc une primitive F de f est $F\colon\ x \mapsto 47,8\left(x + 5,7143\ \mathrm{e}^{-0,175x}\right)$, d'où $p_m = \dfrac{F(5) - F(0)}{5}$

$F(5) = 273,1292\,\mathrm{e}^{-0,875} + 239$ et $F(0) = 273,1292$, donc $p_m = \dfrac{273,1292\ \mathrm{e}^{-0,875} - 34,1292}{5}$

$\boxed{p_m \simeq 15,94}$

Exercice 2

Partie 1

Chaque prélèvement d'une préforme est une épreuve de Bernoulli, avec les deux évènements contraires : **succès** qui correspond à une préforme **non conforme** et echec qui correspond à une préforme conforme, d'après l'énoncé **P(succès)=0,005**. Cette **même épreuve** est **répétée 80 fois**, de plus les épreuves sont **indépendantes** car le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise. La variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès, à l'issue de cette expérience aléatoire, suit une **loi binomiale de paramètres n =80 et p=0,005**. $X \sim> \mathscr{B}(80\ ;\ 0,005)$

La probabilité qu'il y ait une seule préforme non conforme dans un lot de 80 est

$$P(X=1) = \binom{80}{1} \times 0,005^1 \times 0,995^{79} \simeq 0.269$$

La probabilité qu'il y ait plus d'une préforme non conforme dans un lot de 80 est

$$P(X>1) = 1 - P(X \leqslant 1)$$

$P(X \leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1) = \simeq 0.939$, donc $\boxed{P(X>1) \simeq 0.061}$

Partie 2

Une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est

$$y = 0,277x + 0,613$$

Si l'évolution du pourcentage de bouteilles défectueuses se poursuit de la même manière dans les jours suivants, au neuvième jour le pourcentage de bouteilles défectueuses s'élèvera à $0,277 \times 9 + 0,613$, soit $3,1\%$.

Partie 3

$C \sim> \mathscr{N}(30\ ,\ 1)$, on pose $T = \dfrac{C - 30}{1}$, donc $T \sim> \mathscr{N}(0\ ,\ 1)$.

La probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production soit conforme est $P(28 \leqslant C \leqslant 32)$.
$P(28 \leqslant C \leqslant 32) = P\left(\dfrac{28-30}{1} \leqslant T \leqslant \dfrac{32-30}{1}\right)$, c'est à dire $P(28 \leqslant C \leqslant 32) = 2\pi(2)-1 \simeq 0{,}954\,5$, où π est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Un test bilatéral est construit de la manière suivante :

$$\begin{cases} H_0 : m = 30, \quad \text{la charge moyenne de compression verticale des bouteilles est égale à 30 N} \\ \text{contre} \\ H_1 : m \neq 30, \quad \text{la charge moyenne de compression verticale des bouteilles n'est pas égale à 30 N} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{C} \sim> \mathcal{N}(30\ ,\ 0,1)$, donc la variable aléatoire $Z = \dfrac{\overline{C}-30}{0,1}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\ ,\ 1)$, d'où

$$P\left(30 - a\overline{C}30 + a\right) = 0,95 \iff P\left(\frac{-a}{0,1}Z\frac{a}{0,1}\right) = 0,95$$

$$P\left(30 - a\overline{C}30 + a\right) = 0,95 \iff 2\pi\left(\frac{a}{0,1}\right) - 1 = 0,95$$

On en déduit que le réel a vérifie l'équation : $\pi\left(\dfrac{a}{0,1}\right) = 0,975$, où π est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La lecture inverse de la table de la loi normale centrée réduite donne $\dfrac{a}{0,1} \simeq 1.96$, d'où $\boxed{a \simeq 0,196}$

La règle de décision relative à ce test d'hypothèse se résume de la manière suivante :

D'après la question précédente, si H_0 est vraie, il n' y a que 5% de chances de prélever un échantillon au hasard de taille 100 dont la moyenne soit dans l'intervalle $I = [29,804\ ;\ 30,196]$, donc si la moyenne $\overline{c}$ d'un échantillon de 100 bouteilles, prélevées au hasard dans la production, est dans l'intervalle $I = [30 - a\ ,30 + a]$, où a est le réel trouvé dans la question b, alors l'hypothèse nulle H_0 n'est pas rejetée sinon on rejette H_0 et on accepte H_1 avec un risque de 5%.

D'après **b**, $I = [29,804\ ;\ 30,196]$, comme $\overline{c} = 29,4 \notin I$, donc l'hypothèse nulle, $H_0 : m = 30$, est rejetée. On peut conclure, au seuil de 5 %, que la charge moyenne de compression verticale sur l'ensemble de la production de bouteilles n'est pas égale à 30 Newtons.