

∞ **Brevet de technicien supérieur** ∞  
**Groupement A2 session 2005**  
**Métropole – Polynésie**

**Exercice 1****9 points**

Le but de cet exercice est d'étudier une approximation du cercle de centre O et de rayon 1 par une courbe B-spline uniforme de degré 2, notée  $\Gamma$ , dont les points de contrôle  $P_0, P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  ont pour affixes respectives :

$$p_0 = \frac{16}{9} e^{-i\frac{2\pi}{3}}, p_1 = \frac{16}{9}, p_2 = \frac{16}{9} e^{i\frac{2\pi}{3}}, p_3 = p_0 \text{ et } p_4 = p_1$$

où  $i$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

Les polynômes de Riesenfeld  $R_k$  de degré 2, pour  $k$  prenant les valeurs 0, 1 ou 2, sont définis par :

$$R_k(t) = 3 \sum_{j=0}^{2-k} (-1)^j \frac{(t+2-k-j)^2}{j!(3-j)!}$$

La courbe B-spline  $\Gamma$  est la réunion de trois arcs de courbe  $C_j$ ,  $j$  prenant les valeurs 1, 2 ou 3.

L'arc  $C_j$  est l'ensemble des points  $M_j(t)$  définis, pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OM_j(t)} = R_0(t)\overrightarrow{OP_{j-1}} + R_1(t)\overrightarrow{OP_j} + R_2(t)\overrightarrow{OP_{j+1}}$$

Les arcs  $C_2$  et  $C_3$  sont représentés sur la figure du document réponse.

**1. Questions préliminaires**

- a. Vérifier que les coordonnées du point  $P_0$  sont  $\left(-\frac{8}{9}, -\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)$ .
- b. Placer les points de contrôle  $P_0, P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  sur la figure du document réponse.
- c. Développer et simplifier l'expression du polynôme  $R_0$ .

Dans toute la suite de cet exercice, on admettra que, pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  :

$$R_1(t) = -t^2 + t + \frac{1}{2} \text{ et } R_2(t) = \frac{1}{2}t^2$$

**2. Étude de l'arc  $C_1$** 

On admet que les coordonnées  $(x_1(t); y_1(t))$  du point  $M_1(t)$  de l'arc  $C_1$  sont, pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{4}{9}(-6t^2 + 6t + 1) \\ y_1(t) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

- a. Étudier les variations des fonctions  $x_1$  et  $y_1$  définies ci-dessus et dresser un tableau des variations conjointes de ces deux fonctions. On donnera les coordonnées exactes des points  $M_1(0)$ ,  $M_1\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $M_1(1)$  de l'arc  $C_1$ .

- b. Déterminer des vecteurs directeurs des tangentes à l'arc  $C_1$  aux points  $M_1(0)$  et  $M_1(1)$ .
- c. Vérifier que ces vecteurs sont orthogonaux respectivement aux vecteurs  $\overrightarrow{OM_1(0)}$  et  $\overrightarrow{OM_1(1)}$ .
- d. Porter sur la figure du document réponse les tangentes à l'arc  $C_1$  aux points  $M_1(0)$  et  $M_1(1)$ . Tracer l'arc  $C_1$  et les cercles de centre O passant par les points  $M_1(0)$  et  $M_1\left(\frac{1}{2}\right)$ .

### 3. Étude de l'arc $C_2$

- a. On note  $(x_2(t), y_2(t))$  les coordonnées du point  $M_2(t)$  de l'arc  $C_2$ .

$$\text{Vérifier que } x_2(t) = \frac{4}{3}t^2 - \frac{8}{3}t + \frac{4}{9}.$$

On admettra dans toute la suite de l'exercice que :

$$y_2(t) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}t^2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}t + \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

- b. On considère la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .  
Soit  $M$  un point quelconque du plan et  $M'$  son image par la rotation  $r$ .  
Exprimer l'affixe  $z'$  du point  $M'$  en fonction de l'affixe  $z$  du point  $M$ .
- c. On note  $(x; y)$  les coordonnées du point  $M$  et  $(x'; y')$  celles du point  $M' = r(M)$ .
- $$\text{Vérifier que : } \begin{cases} x' &= -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$
- d. En déduire que, pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[0; 1]$ , l'image du point  $M_1(t)$  de l'arc  $C_1$  par la rotation  $r$  est le point  $M_2(t)$  de l'arc  $C_2$ .  
On admet que l'arc  $C_2$  est l'image de l'arc  $C_1$  par la rotation  $r$  et que l'arc  $C_3$ , est l'image de l'arc  $C_2$  par la rotation  $r$ .

### 4. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ de la surface intérieure à la courbe B-spline $\Gamma$

- a. On admet que l'aire de la surface délimitée par l'arc  $C_1$  et la droite d'équation  $x = \frac{4}{9}$  est donnée par l'intégrale :

$$I = \int_0^1 -y_1(t)x_1'(t) dt.$$

Calculer l'intégrale  $I$ .

- b. En déduire la valeur arrondie, au centième, de l'aire de la surface intérieure à la courbe  $\Gamma$ .
- c. Comparer le résultat avec l'aire d'un disque de rayon 1.

## Exercice 2

11 points

### Toutes spécialités

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

#### Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant  $t = 0$ , un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.

On note  $\omega(t)$ , la vitesse de rotation du moteur à l'instant  $t$ .

La fonction  $\omega$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}y'(t) + y(t) = 146 \quad (1)$$

où  $y$  désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive  $t$ .

1. a. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).  
*On cherchera une solution particulière constante.*
- b. Sachant que  $\omega(0) = 150$ , montrer que  $\omega(t) = 146 + 4e^{-200t}$  pour tout  $t \in [0; +\infty[$ .
2. a. On note  $\omega_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t)$ . Déterminer la perte de vitesse  $\omega(0) - \omega_\infty$ , due au couple résistant.
- b. On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif  $\left| \frac{\omega(t) - \omega_\infty}{\omega_\infty} \right|$  est inférieur à 1 %.  
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.  
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

### Partie B

La vitesse du moteur étant stabilisée, on s'intéresse dans cette deuxième partie à l'effet d'une perturbation  $\gamma$  du couple résistant sur la vitesse de rotation du moteur. On note  $f(t)$  la différence, à l'instant  $t$ , entre la vitesse perturbée du moteur et sa vitesse stabilisée.

La fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{200}f'(t) + f(t) = \gamma(t) \text{ avec } f(0^+) = 0 \quad (2)$$

On admet que la fonction  $f$  possède une transformée de Laplace notée  $F$ .

La fonction  $\gamma$  est définie par :

$$\gamma(t) = K[U(t) - U(t - \tau)]$$

où  $\tau$  et  $K$  sont des réels strictement positifs caractérisant la perturbation et  $U$  est la fonction échelon unité ( $U(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $U(t) = 1$  si  $t \geq 0$ ).

1. a. Représenter la fonction  $\gamma$  pour  $\tau = 0,005$  et  $K = 0,2$ .
- b. Déterminer, en fonction de  $\tau$  et  $K$ , la transformée de Laplace  $\Gamma$  de la fonction  $\gamma$ .
2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (2), déterminer  $F(p)$ .
3. a. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\frac{200}{p(p+200)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+200}$$

pour tout réel  $p$  strictement positif.

- b. En déduire l'original  $f$  de la fonction  $F$ . On vérifiera notamment que :

$$\begin{cases} f(t) = K(1 - e^{-200t}) & \text{si } t \in [0; \tau[ \\ f(t) = K(e^{200\tau} - 1)e^{-200t} & \text{si } t \in [\tau; +\infty[ \end{cases}$$

- c. Donner le sens de variation de la fonction  $f$  sur chacun des intervalles  $[0; \tau[$  et  $[\tau; +\infty[$ .  
Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de ces deux intervalles.
- d. Représenter la fonction  $f$  pour  $\tau = 0,005$  et  $K = 0,2$ .  
On pourra tracer les courbes représentatives des fonctions  $\gamma$  et  $f$  dans le même repère.

**Document réponse à rendre avec la copie**

